Integración por partes para funciones absolutamente continuas (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2020-05-27

Objetivo:

establecer una versión de la fórmula de integración por partes, en el contexto de la integral de Lebesgue.

Objetivo:

establecer una versión de la fórmula de integración por partes,
en el contexto de la integral de Lebesgue.

Prerrequisitos:

- la fórmula para la derivada del producto,
- propiedades de funciones absolutamente continuas,
- los teoremas fundamentales del cálculo en el contexto de la integral de Lebesgue.

Plan

$$ab - cd =$$

$$ab - cd = ab - ad + ad - cd =$$

$$ab - cd = ab - ad + ad - cd = a(b - d) + (a - c)d.$$

La derivada del producto (repaso)

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{C}$, $x \in A$. Supongamos que f y g son derivables en x. Entonces fg también es derivable en x,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La derivada del producto (repaso)

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g \colon A \to \mathbb{C}$, $x \in A$. Supongamos que f y g son derivables en x. Entonces fg también es derivable en x,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Primeros pasos de la demostración:

$$f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(y)(g(y) - g(x)) + (f(y) - f(x))g(x).$$

La derivada del producto (repaso)

Proposición

Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{C}$, $x \in A$. Supongamos que f y g son derivables en x. Entonces fg también es derivable en x,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Primeros pasos de la demostración:

$$f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(y)(g(y) - g(x)) + (f(y) - f(x))g(x).$$

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} = \left(\lim_{y \to x} f(y)\right)\left(\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right) + g(x)\left(\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right).$$

Notación para algunas clases de funciones (repaso)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$\begin{aligned}
C([a,b]) &:= \text{el espacio de las funciones continuas } [a,b] \to \mathbb{C},\\
C^1([a,b]) &:= \text{funciones continuamente derivables},\\
B([a,b]) &:= \text{funciones acotadas},\\
\mathrm{Lip}([a,b]) &:= \text{funciones Lipschitz continuas},\\
\mathrm{AC}([a,b]) &:= \text{funciones absolutamente continuas},\\
\mathrm{BV}([a,b]) &:= \text{funciones de variación acotada}.
\end{aligned}$$

Las funciones absolutamente continuas y otras clases (repaso)

Mostramos con flechas $\to$ la relación $\subseteq$ (en realidad, $\subsetneq$).

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dr] & \\
C^1 \arrow[r] & \mathrm{Lip} \arrow[r] & \mathrm{AC} \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \\
 & & & \mathrm{BV} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Derivadas de las funciones de variación acotada (repaso)

Denotamos por μ la medida de Lebesgue.

$L^1([a,b]) := L^1([a,b],\mu,\mathbb{C})$.

Para $f \in L^1([a,b])$, $\displaystyle\int_a^b f := \int_{[a,b]} f \ \mathrm{d}\mu$.

Derivadas de las funciones de variación acotada (repaso)

Denotamos por μ la medida de Lebesgue.

$L^1([a,b]) \coloneqq L^1([a,b],\mu,\mathbb{C})$.

Para $f \in L^1([a,b])$, $\displaystyle\int_a^b f \coloneqq \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu$.

Proposición

Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

Entonces f es derivable μ-c.t.p., y $f' \in L^1([a,b])$.

Funciones absolutamente continuas e integrales (repaso)

Los siguientes teoremas son variaciones de los dos teoremas fundamentales del cálculo.

Funciones absolutamente continuas e integrales (repaso)

Los siguientes teoremas son variaciones de los dos teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema

Sea $f \in L^1([a, b])$. Definimos $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^x f.$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a, b])$ y $F' = f$ c.t.p.

Funciones absolutamente continuas e integrales (repaso)

Los siguientes teoremas son variaciones de los dos teoremas fundamentales del cálculo.

Teorema

Sea $f \in L^1([a,b])$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $\quad F(x) := \displaystyle\int_a^x f$.

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $F' = f$ c.t.p.

Teorema

Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces $F' \in L^1([a,b])$ y para cada x en $[a,b]$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'.$$

El producto de funciones absolutamente continuas (repaso)

Proposición

Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces $FG \in \mathrm{AC}([a, b])$.

El producto de funciones absolutamente continuas (repaso)

Proposición

Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces $FG \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Idea de demostración.

Dada una lista de intervalos $\big((x_k, y_k)\big)_{k=1}^m$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m |f(y_k)g(y_k) - f(x_k)g(x_k)| &= \\
&\le \sum_{k=1}^m |f(y_k)|\,|g(y_k) - g(x_k)| + \sum_{k=1}^m + |f(y_k) - f(x_k)|\,|g(x_k)| \\
&\le \|f\|_{\sup} \sum_{k=1}^m |g(y_k) - g(x_k)| + \|g\|_{\sup} \sum_{k=1}^m |f(y_k) - f(x_k)|.
\end{aligned}
$$

Plan

Integración por partes para funciones absolutamente continuas

Proposición (integración por partes para funciones absolutamente continuas)

Sean $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad U, V \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Entonces

$$\int_a^b UV' = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

Integración por partes para funciones absolutamente continuas

Demostración.

Ya sabemos que $UV \in \mathrm{AC}([a,b])$, y la siguiente igualdad se cumple μ-c.t.p.:

$$(UV)' = U'V + UV'.$$

Por la regla de Barrow para funciones absolutamente continuas,

$$\int_a^b (UV)' = (UV)(b) - (UV)(a).$$

Aplicamos estas propiedades y la propiedad aditiva de la integral:

$$\int_a^b U'V + \int_a^b UV' = (UV)(b) - (UV)(a). \qquad \square$$

Proposición (integración por partes para funciones abs. continuas, otra forma)

Sean $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad U \in \mathrm{AC}([a, b]),\ v \in L^1([a, b])$.

Definimos $V\colon [a, b] \to \mathbb{C},\ V(x) := \int_a^x v$.

Entonces

$$\int_a^b Uv = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

Proposición (integración por partes para funciones abs. continuas, otra forma)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $U \in \mathrm{AC}([a,b])$, $v \in L^1([a,b])$.

Definimos $V\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $V(x) := \int_a^x v$.

Entonces

$$\int_a^b Uv = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

En efecto, $V \in \mathrm{AC}([a,b])$, V es derivable μ-c.t.p., y μ-c.t.p. se cumple $V' = v$.

Proposición (integración por partes para funciones abs. continuas, otra forma)

Sean $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad U \in \mathrm{AC}([a, b]),\ v \in L^1([a, b])$.

Definimos $V \colon [a, b] \to \mathbb{C},\ V(x) := \displaystyle\int_a^x v$.

Entonces

$$\int_a^b Uv = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

En efecto, $V \in \mathrm{AC}([a, b])$, $\qquad V$ es derivable μ-c.t.p., $\qquad$ y μ-c.t.p. se cumple $V' = v$.

Aquí hemos aplicamodo el primer teorema fundamental del cálculo.

Corolario (integración por partes para funciones continuamente derivables)

Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\quad U \in C^1([a, b]),\ v \in C([a, b])$.

Definimos $V\colon [a, b] \to \mathbb{C},\ V(x) := \displaystyle\int_a^x v$.

Entonces

$$\int_a^b Uv = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

Corolario (integración por partes para funciones continuamente derivables)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $U \in C^1([a,b])$, $v \in C([a,b])$.

Definimos $V\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $V(x) := \int_a^x v$.

Entonces

$$\int_a^b Uv = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b U'V.$$

Este resultado clásico se puede ver como un caso particular del anterior:

$$C^1([a,b]) \subseteq \mathrm{AC}([a,b]), \qquad C([a,b]) \subseteq L^1([a,b]).$$