Programa del curso “análisis armónico” (“temas selectos de análisis funcional y real”)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

17 de agosto de 2021

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$,
- $\forall a, b \in G \qquad a + b = b + a$,
- $\exists 0 \in G \qquad \forall a \in G \qquad a + 0 = a$,
- $\forall a \in G \qquad \exists b \in G \qquad a + b = 0$.

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$,
- $\forall a, b \in G \qquad a + b = b + a$,
- $\exists 0 \in G \qquad \forall a \in G \qquad a + 0 = a$,
- $\forall a \in G \qquad \exists b \in G \qquad a + b = 0$.

Un espacio topológico (G, τ) se llama localmente compacto, si

Grupos conmutativos localmente compactos

$(G, +)$ es un grupo conmutativo si

- $\forall a, b, c \in G \qquad (a + b) + c = a + (b + c)$,
- $\forall a, b \in G \qquad a + b = b + a$,
- $\exists 0 \in G \qquad \forall a \in G \qquad a + 0 = a$,
- $\forall a \in G \qquad \exists b \in G \qquad a + b = 0$.

Un espacio topológico (G, τ) se llama localmente compacto, si

$$\forall a \in G \qquad \exists V \in \tau \qquad \Big(a \in V \qquad \wedge \qquad \operatorname{clos}(V) \text{ es compacto}\Big).$$

Medida de Haar en un GCLC

Teorema (sin demostración)

Sea G un grupo conmutativo localmente compacto.

Denotamos por $\mathcal{B}_G$ a la σ-álgebra de Borel de G.

Entonces existe una medida $\nu\colon \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ tal que

- ν es invariante bajo traslaciones:

$$\forall a \in G \qquad \forall X \in \mathcal{B}_G \qquad \nu(a + X) = \nu(X),$$

- ν es regular por arriba y por abajo.

Medida de Haar en un GCLC

Teorema (sin demostración)

Sea G un grupo conmutativo localmente compacto.

Denotamos por $\mathcal{B}_G$ a la σ-álgebra de Borel de G.

Entonces existe una medida $\nu\colon \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ tal que

- ν es invariante bajo traslaciones:

$$\forall a \in G \qquad \forall X \in \mathcal{B}_G \qquad \nu(a + X) = \nu(X),$$

- ν es regular por arriba y por abajo.

Si ν_1 y ν_2 son dos medidas de Haar sobre G, entonces existe $C > 0$ tal que $\nu_2 = C\nu_1$.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \qquad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) =$$

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \qquad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \qquad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$,

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \qquad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, con la topología del cociente y la medida normalizada.

Ejemplos de grupos abelianos localmente compactos

- $\mathbb{Z}$, con la topología discreta y la medida de conteo.
- $\mathbb{R}$, con la topología usual y la medida de Lebesgue.
- $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$, con la topología discreta y la medida de conteo.

$$n = 5, \qquad \nu(\{3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}) = 2.$$

- $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, con la topología del cociente y la medida normalizada.

Se puede mostrar que $\mathbb{R}_{2\pi} \cong \mathbb{T}$, donde

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \qquad \psi(a+b) = \psi(a)\psi(b)$,
- ψ es una función continua.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \qquad \psi(a+b) = \psi(a)\psi(b)$,
- ψ es una función continua.

El sentido intuitivo: son oscilaciones elementales.

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

En otras palabras, $\psi\colon G \to \mathbb{T}$ es un caracter si

- $\forall a, b \in G \qquad \psi(a+b) = \psi(a)\psi(b)$,
- ψ es una función continua.

El sentido intuitivo: son oscilaciones elementales.

$\widehat{G} :=$ el conjunto de los caracteres de G, con las operaciones punto a punto:

$$(\psi_1\psi_2)(a) := \psi_1(a)\psi_2(a).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{R}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\xi(a) = \exp(2\pi \, \mathrm{i} \, a\xi) \qquad (a \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{R}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\xi(a) = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,a\xi) \qquad (a \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}).$$

- Para $G = \mathbb{Z}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_\tau(k) = \tau^k \qquad (k \in \mathbb{Z},\ \tau \in \mathbb{T}).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{T}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_k(\tau) = \tau^k \qquad (\tau \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de caracteres

- Para $G = \mathbb{T}$, cada caracter es de la forma

$$\psi_k(\tau) = \tau^k \qquad (\tau \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{Z}).$$

- Para $G = \mathbb{Z}_n$, cada caracter es de la forma

$$\psi_{k+n\mathbb{Z}}(j + n\mathbb{Z}) = \exp \frac{2\pi \,\mathrm{i}\, jk}{n} \qquad (j, k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplos de grupos y sus duales

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_n \arrow[loop right, "\widehat{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}"] & \mathbb{T} \arrow[l, shift left, "\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[loop right, "\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}"] \end{tikzcd}$$

Topología y medida de Haar en el grupo dual

Sea G un GALC.

En el grupo dual $\widehat{G}$ se puede definir una topología tal que $\widehat{G}$ se convierte en GALC.

Supongamos que en el grupo original G está elegida una medida de Haar ν.
En el grupo dual $\widehat{G}$ hay muchas medidas de Haar,
pero una de ellas a ν en cierto sentido.
La denotamos por $\widehat{\nu}$.

Teorema de dualidad de Pontryagin

Teorema (dualidad de Pontryagin)

Sea G un GALC. Entonces
$$\widehat{\widehat{G}} \cong G.$$

Teorema de dualidad de Pontryagin

Teorema (dualidad de Pontryagin)

Sea G un GALC. Entonces

$$\widehat{\widehat{G}} \cong G.$$

En este curso no demostramos el teorema de Pontryagin, pero lo comprobamos con nuestros ejemplos:

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}, \qquad \widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}.$$

El problema fundamental de análisis armónico, enunciado intuitivo

Dada una función $f\colon G \to \mathbb{C}$, queremos aproximarla por una combinación lineal de las oscilaciones elementales, es decir, caracteres:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{m} c_k \psi_k(x),$$

$$c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}, \qquad \psi_1, \ldots, \psi_m \in \widehat{G}.$$

En general, en vez de una combinación lineal finita necesitamos una integral que involucra a todos los caracteres:

$$f(x) \approx \int_{\widehat{G}} g(\psi)\psi(x)\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\psi).$$

Aquí g es una función desconocida que da cierto peso a cada caracter.

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x) \, \mathrm{d}\nu(x).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x)\,\mathrm{d}\nu(x).$$

Teorema (teorema de inversión de Fourier)

Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(x)(\mathcal{F}f)(\psi)\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\psi).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC. Para cada f en $L^1(G)$, se define $\mathcal{F}f\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\psi) := \int_G \overline{\psi(x)} f(x)\,\mathrm{d}\nu(x).$$

Teorema (teorema de inversión de Fourier)

Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(x)(\mathcal{F}f)(\psi)\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\psi).$$

El sentido intuitivo: f se descompone en las oscilaciones elementales.

Se resuelve el problema fundamental con $g = \mathcal{F}f$.

Teorema (de Plancherel)

Sea $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Entonces

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Convolución

Dadas $f, g \in L^1(G)$,

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Convolución

Dadas $f, g \in L^1(G)$,

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g).$$

Análisis armónico clásico vs análisis armónico abstracto

En el análisis armónico abstracto se estudian las propiedades de la transformada de Fourier asociada a un GALC arbitrario G.

En este curso no lo vamos a hacer.

Estudiaremos solamente los casos $G = \mathbb{Z}_n$, $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}_{2\pi} \cong \mathbb{T}$ y $G = \mathbb{R}$.

Programa

El curso consiste de las siguientes unidades.

- La transformada de Fourier del grupo $\mathbb{Z}_n$
  (la transformada finita de Fourier, la matriz de Fourier).
- Las transformadas de Fourier de los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}_{2\pi}$
  (las series de Fourier y los coeficientes de Fourier).
- La transformada de Fourier del grupo $\mathbb{R}$ (la integral de Fourier).

Algunas aplicaciones de análisis armónico

- Aproximación de funciones.
- El estudio de algunas ecuaciones diferenciales.
- El estudio de algunos operadores lineales.
- El estudio de algunas clases de matrices (incluso las matrices de Toeplitz).
- Análisis espectral de procesos reales (procesamiento de señales, procesos estocásticos).

Bibliografía principal

- Wong, Man Wah:
  Discrete Fourier Analysis.
- Pinsky, Mark A.:
  Introduction to Fourier Analysis and Wavelets.
- Gasquet, Claude; Witomski, Patrick:
  Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets.
- Rudin, Walter:
  Functional Analysis.
- Folland, Gerald B.:
  A Course in Abstract Harmonic Analysis.

Sistema de evaluación

- Dos exámenes parciales: 50 %.
- Exposiciones de los estudiantes, por equipos.
- Tareas grandes, por equipos de 2 o 3 personas.
  Deben involucrar mucha programación. De preferencia, deben ser aplicadas.
- Una o dos tareas pequeñas, por equipos de 2 personas.