

# El supremo esencial de funciones positivas medibles (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

2024-09-18

## Objetivos:

- definir  $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f$  para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,
- estudiar las propiedades básicas de  $\operatorname{ess\,sup}$ .

## Objetivos:

- definir  $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f$  para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,
- estudiar las propiedades básicas de  $\operatorname{ess\,sup}$ .

## Prerrequisitos:

- el ínfimo de los subconjuntos de  $[0, +\infty]$ ,
- los conjuntos  $\{x \in X : f(x) > v\}$  y sus propiedades básicas,
- la fórmula

$$]v, +\infty] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left] v + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

## Aplicaciones:

- la seminorma extendida  $\mathcal{N}_\infty$ ,
- los espacios  $\mathcal{L}^\infty$  y  $L^\infty$ ,
- acotación de algunas integrales.

1 Las cotas superiores esenciales y el supremo esencial

2 Propiedades aritméticas del supremo esencial

3 Otras propiedades del supremo esencial

# Plan

- 1 Las cotas superiores esenciales y el supremo esencial
- 2 Propiedades aritméticas del supremo esencial
- 3 Otras propiedades del supremo esencial

## Los cotas superiores esenciales

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) :=$  el conjunto de las funciones  $X \rightarrow [0, +\infty]$ , medibles respecto a  $\mathcal{F}$ .

En este tema, para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,

$\mathcal{U}(f, \mu) :=$  el conjunto de las cotas superiores esenciales de  $f$ :

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

En otras palabras,  $v$  es una cota superior esencial de  $f$  (respecto a la medida  $\mu$ ) si, y solo si,

$$f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} v.$$

## El supremo esencial

Para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$



## El supremo esencial

Para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,

$$\text{ess sup}_{X, \mu} f := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Pongamos

$$\alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Entonces  $\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty]$ .

## El supremo esencial

Para cada  $f$  en  $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,

$$\text{ess sup } f := \inf_{X, \mu}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Pongamos

$$\alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Entonces  $\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty]$ .

En particular, estamos afirmando que el conjunto  $\mathcal{U}(f, \mu)$  tiene un elemento mínimo.

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Por la definición de  $\inf$ , es obvia la contención

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Por la definición de  $\inf$ , es obvia la contención  $\subseteq$ .



## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Por la definición de  $\inf$ , es obvia la contención  $\subseteq$ .
- En el caso  $\alpha = +\infty$ , la afirmación es trivial. Supongamos que  $\alpha < +\infty$ .

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Por la definición de  $\inf$ , es obvia la contención  $\subseteq$ .
- En el caso  $\alpha = +\infty$ , la afirmación es trivial. Supongamos que  $\alpha < +\infty$ .
- Mostraremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

## Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que  $+\infty \in \mathcal{U}(f, \mu)$ . En particular,  $\mathcal{U}(f, \mu) \neq \emptyset$ .
- Mostraremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Por la definición de  $\inf$ , es obvia la contención  $\subseteq$ .
- En el caso  $\alpha = +\infty$ , la afirmación es trivial. Supongamos que  $\alpha < +\infty$ .
- Mostraremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .
- Mostraremos que  $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ .

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \quad \{x \in X: f(x) > v\}$$

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \subseteq \{x \in X: f(x) > v\}.$$

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \subseteq \{x \in X: f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de  $\mu$  y luego la suposición que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ :



I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \subseteq \{x \in X: f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de  $\mu$  y luego la suposición que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ :

$$\mu(\{x \in X: f(x) > w\}) \leq \mu(\{x \in X: f(x) > v\})$$

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \subseteq \{x \in X: f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de  $\mu$  y luego la suposición que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ :

$$\mu(\{x \in X: f(x) > w\}) \leq \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0.$$

I. Demostremos que si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty]: \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$  y  $w > v$ . Entonces

$$\{x \in X: f(x) > w\} \subseteq \{x \in X: f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de  $\mu$  y luego la suposición que  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ :

$$\mu(\{x \in X: f(x) > w\}) \leq \mu(\{x \in X: f(x) > v\}) = 0.$$

Hemos mostrado que  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Supongamos que  $w > \alpha$ .

II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Supongamos que  $w > \alpha$ .

Entonces, por la definición de  $\inf$ ,

II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Supongamos que  $w > \alpha$ .

Entonces, por la definición de  $\inf$ , existe  $v$  en  $\mathcal{U}(f, \mu)$  tal que  $v < w$ .

II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Supongamos que  $w > \alpha$ .

Entonces, por la definición de  $\inf$ , existe  $v$  en  $\mathcal{U}(f, \mu)$  tal que  $v < w$ .

Por la parte I de la demostración,



II. Demostremos que si  $w > \alpha$ , entonces  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \left\{ v \in [0, +\infty] : \mu(\{x \in X : f(x) > v\}) = 0 \right\}, \quad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Supongamos que  $w > \alpha$ .

Entonces, por la definición de  $\inf$ , existe  $v$  en  $\mathcal{U}(f, \mu)$  tal que  $v < w$ .

Por la parte I de la demostración,  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty[ = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right[.$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} =$$

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty[ = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right[.$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{ x \in X : f(x) > \alpha + \frac{1}{p} \right\}.$$

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty[ = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right[.$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{ x \in X : f(x) > \alpha + \frac{1}{p} \right\}.$$

Por la parte II de la demostración,  $\alpha + \frac{1}{p} \in \mathcal{U}(f, \mu)$  para cada  $p$  en  $\mathbb{N}$ .

### III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left] \alpha + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a  $f$ :

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{ x \in X : f(x) > \alpha + \frac{1}{p} \right\}.$$

Por la parte II de la demostración,  $\alpha + \frac{1}{p} \in \mathcal{U}(f, \mu)$  para cada  $p$  en  $\mathbb{N}$ .

Usamos la propiedad subaditiva de  $\mu$ :

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha + 1/p\}) = 0.$$



## Corolario

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu} f.$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) :=$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) =$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$



## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}, \mu} f =$$

## Ejemplo

Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Consideremos a la función indicadora del conjunto  $\mathbb{Q}$ :

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}, \mu} f = 0.$$

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Denotar el conjunto  $\{x \in X: f(x) > v\}$  de manera breve, por ejemplo,

$$A_{f,\mu,v} := \{x \in X: f(x) > v\}.$$

Representar  $A_{f,\mu,v}$  como la preimagen

$$A_{f,\mu,v} := f^{-1} [ ??? ].$$

Usando propiedades apropiadas de los rayos derechos,  
demostrar propiedades correspondientes de los conjuntos  $A_{f,\mu,v}$ ,  
luego escribir la demostración anterior con esta notación.

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left([v, +\infty]\right) \supseteq f^{-1}\left([w, +\infty]\right),$$

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left([v, +\infty]\right) \supseteq f^{-1}\left([w, +\infty]\right),$$



## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left[[v, +\infty]\right] \supseteq f^{-1}\left[[w, +\infty]\right],$$

$$A_{f,\mu,v} \supseteq A_{f,\mu,w}.$$

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left[[v, +\infty]\right] \supseteq f^{-1}\left[[w, +\infty]\right],$$

$$A_{f, \mu, v} \supseteq A_{f, \mu, w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}[[v, +\infty]] \supseteq f^{-1}[[w, +\infty]],$$

$$A_{f, \mu, v} \supseteq A_{f, \mu, w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces  $\mu(A_{f, \mu, v}) = 0$ ,

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left[[v, +\infty]\right] \supseteq f^{-1}\left[[w, +\infty]\right],$$

$$A_{f, \mu, v} \supseteq A_{f, \mu, w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces  $\mu(A_{f, \mu, v}) = 0$ , luego

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left[[v, +\infty]\right] \supseteq f^{-1}\left[[w, +\infty]\right],$$

$$A_{f,\mu,v} \supseteq A_{f,\mu,w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces  $\mu(A_{f,\mu,v}) = 0$ , luego  $\mu(A_{f,\mu,w}) = 0$ ,

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}\left[[v, +\infty]\right] \supseteq f^{-1}\left[[w, +\infty]\right],$$

$$A_{f,\mu,v} \supseteq A_{f,\mu,w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces  $\mu(A_{f,\mu,v}) = 0$ , luego  $\mu(A_{f,\mu,w}) = 0$ , así que

## Ejercicio (escribir la demostración anterior con una notación concisa)

Si  $v, w \in [0, +\infty]$  y  $w > v$ , entonces

$$[v, +\infty] \supseteq [w, +\infty],$$

$$f^{-1}[[v, +\infty]] \supseteq f^{-1}[[w, +\infty]],$$

$$A_{f, \mu, v} \supseteq A_{f, \mu, w}.$$

Si  $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ , entonces  $\mu(A_{f, \mu, v}) = 0$ , luego  $\mu(A_{f, \mu, w}) = 0$ , así que  $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$ .

# Plan

- 1 Las cotas superiores esenciales y el supremo esencial
- 2 Propiedades aritméticas del supremo esencial**
- 3 Otras propiedades del supremo esencial



## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;
- si  $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$ , entonces

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;
- si  $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$ , entonces  $f(x) > \alpha$  o  $g(x) > \beta$ ;

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;
- si  $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$ , entonces  $f(x) > \alpha$  o  $g(x) > \beta$ ;
- $\{x \in X: (f + g)(x) > \alpha + \beta\}$

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;
- si  $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$ , entonces  $f(x) > \alpha$  o  $g(x) > \beta$ ;
- $\{x \in X : (f + g)(x) > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : g(x) > \beta\}$ ;

## La propiedad subaditiva

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f) + \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(g).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición. Sugerencias:

- si  $f(x) \leq \alpha$  y  $g(x) \leq \beta$ , entonces  $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$ ;
- si  $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$ , entonces  $f(x) > \alpha$  o  $g(x) > \beta$ ;
- $\{x \in X : (f + g)(x) > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : g(x) > \beta\}$ ;
- elegir  $\alpha$  y  $\beta$  de manera apropiada.

## La propiedad homogénea

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,  $\lambda \in [0, +\infty]$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(\lambda f) = \lambda \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f).$$



## La propiedad homogénea

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ ,  $\lambda \in [0, +\infty]$ . Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(\lambda f) = \lambda \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu}(f).$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición.

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \quad \iff \quad f \underline{\underline{\mu\text{-c.t.p.}}} 0.$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \underline{\underline{\mu\text{-c.t.p.}}} 0.$$

**Demostración.**

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff \begin{array}{c} \text{¡explicar bien!} \\ \longleftrightarrow \end{array} 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{array}{ccc} \text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 & \stackrel{\text{¡explicar bien!}}{\iff} & 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\ & & \iff \end{array}$$



¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 & \stackrel{\text{¡explicar bien!}}{\Longleftrightarrow} 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\ & \Longleftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0 \end{aligned}$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 & \stackrel{\text{¡explicar bien!}}{\Longleftrightarrow} 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\ & \Longleftrightarrow \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

¿Cuándo  $\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0$ ?

### Proposición

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Entonces

$$\text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 \quad \iff \quad f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{X,\mu} f = 0 & \stackrel{\text{¡explicar bien!}}{\iff} 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\ & \iff \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0 \\ & \iff f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0. \end{aligned}$$

# Plan

- 1 Las cotas superiores esenciales y el supremo esencial
- 2 Propiedades aritméticas del supremo esencial
- 3 Otras propiedades del supremo esencial

## La propiedad creciente del supremo esencial

En estos ejercicios suponemos que  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida.

## La propiedad creciente del supremo esencial

En estos ejercicios suponemos que  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida.

### **Ejercicio.**

Sean  $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$  tales que  $f \leq g$ . Demostrar que

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu} f \leq \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu} g.$$

## El supremo esencial del máximo de dos funciones

### Ejercicio.

Sean  $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ . Definimos  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$g(x) := \text{máx}\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Demostrar que

$$\text{ess sup}_{X, \mu} g = \text{máx} \left\{ \text{ess sup}_{X, \mu} f_1, \text{ess sup}_{X, \mu} f_2 \right\}.$$

## El supremo esencial del supremo de una sucesión de funciones

### Ejercicio.

Sea  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$ . Definimos  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$g(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x).$$

Para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$  pongamos

$$\alpha_k := \operatorname{ess\,sup}_{X, \mu} f_k.$$

Demostrar que

$$\operatorname{ess\,sup}_{X, \mu} g = \sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k.$$



## El supremo esencial y la imagen esencial

### Ejercicio adicional.

Sea  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty[)$ . Denotemos por  $\text{EssRange}(f)$  la imagen esencial de  $f$ :

$$\text{EssRange}(f) := \left\{ v \in [0, +\infty[: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X: v - \varepsilon < f(x) < v + \varepsilon\}) > 0 \right\}.$$

Demostrar que

$$\text{ess sup}_{X, \mu} f = \sup(\text{EssRange}(f)).$$

Más aún, si  $\text{ess sup}_{X, \mu} f < +\infty$ , demostrar que  $\text{ess sup}_{X, \mu} f$  es el máximo de  $\text{EssRange}(f)$ .