El supremo esencial de funciones positivas medibles (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-28

Objetivos:

- definir $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f$ para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- estudiar las propiedades básicas de $\operatorname{ess\,sup}$.

Objetivos:

- definir $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f$ para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- estudiar las propiedades básicas de $\operatorname{ess\,sup}$.

Prerrequisitos:

- el ínfimo de los subconjuntos de $[0, +\infty]$,
- los conjuntos $\{x \in X\colon\ f(x) > v\}$ y sus propiedades básicas,
- la fórmula

$$]v, +\infty] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left] v + \frac{1}{p}, +\infty \right].$$

Aplicaciones:

- la seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$,
- los espacios $\mathcal{L}^\infty$ y L^∞,
- acotación de algunas integrales.

Plan

1. Las cotas superiores esenciales y el supremo esencial
2. Propiedades aritméticas del supremo esencial
3. Otras propiedades del supremo esencial

Los cotas superiores esenciales

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.
$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) :=$ el conjunto de las funciones $X \to [0, +\infty]$, medibles respecto a $\mathcal{F}$.

En este tema, para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
$\mathcal{U}(f, \mu) :=$ el conjunto de las cotas superiores esenciales de f:

$$\mathcal{U}(f, \mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

En otras palabras, v es una cota superior esencial de f (respecto a la medida μ) si, y solo si,

$$f \;\overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq}\; v.$$

El supremo esencial

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \inf(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

El supremo esencial

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Entonces $\quad \mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty].$

El supremo esencial

Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f, \mu)).$$

Entonces $\quad \mathcal{U}(f, \mu) = [\alpha, +\infty]$.

En particular, estamos afirmando que el conjunto $\mathcal{U}(f, \mu)$ tiene un elemento mínimo.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon\; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha,+\infty].$$

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon\; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha,+\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha,+\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención $\subseteq$.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon\; f(x) > v\}) = 0\Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha, +\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención $\subseteq$.
- En el caso $\alpha = +\infty$, la afirmación es trivial. Supongamos que $\alpha < +\infty$.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon\; f(x) > v\}) = 0\Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha,+\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención $\subseteq$.
- En el caso $\alpha = +\infty$, la afirmación es trivial. Supongamos que $\alpha < +\infty$.
- Mostraremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon\quad \mu(\{x\in X\colon\; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu) = [\alpha,+\infty].$$

- Es obvio que $+\infty \in \mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu) \neq \emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención $\subseteq$.
- En el caso $\alpha = +\infty$, la afirmación es trivial. Supongamos que $\alpha < +\infty$.
- Mostraremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$.
- Mostraremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$.

Plan de la demostración

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v\in[0,+\infty]\colon\quad \mu(\{x\in X\colon\; f(x)>v\})=0 \Big\}, \qquad \alpha := \inf(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Queremos demostrar que

$$\mathcal{U}(f,\mu)=[\alpha,+\infty].$$

- Es obvio que $+\infty\in\mathcal{U}(f,\mu)$. En particular, $\mathcal{U}(f,\mu)\neq\emptyset$.
- Por la definición de ínf, es obvia la contención $\subseteq$.
- En el caso $\alpha=+\infty$, la afirmación es trivial. Supongamos que $\alpha<+\infty$.
- Mostraremos que si $v\in\mathcal{U}(f,\mu)$ y $w>v$, entonces $w\in\mathcal{U}(f,\mu)$.
- Mostraremos que si $w>\alpha$, entonces $w\in\mathcal{U}(f,\mu)$.
- Mostraremos que $\alpha\in\mathcal{U}(f,\mu)$.

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) \ := \ \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$.

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$. Entonces

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X \colon \; f(x) > w\} \qquad \{x \in X \colon \; f(x) > v\}$$

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X \colon \ f(x) > w\} \ \subseteq \ \{x \in X \colon \ f(x) > v\}.$$

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) := \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X : \; f(x) > w\} \subseteq \{x \in X : \; f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de μ y luego la suposición que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$:

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f, \mu) \ := \ \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X : \ f(x) > w\} \ \subseteq \ \{x \in X : \ f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de μ y luego la suposición que $v \in \mathcal{U}(f, \mu)$:

$$\mu(\{x \in X : \ f(x) > w\}) \leq \mu(\{x \in X : \ f(x) > v\})$$

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon\; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X\colon\; f(x) > w\} \;\subseteq\; \{x \in X\colon\; f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de μ y luego la suposición que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$:

$$\mu(\{x \in X\colon\; f(x) > w\}) \le \mu(\{x \in X\colon\; f(x) > v\}) = 0.$$

I. Demostremos que si $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty]:\quad \mu(\{x \in X:\; f(x) > v\}) = 0 \Big\}.$$

Supongamos que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$ y $w > v$. Entonces

$$\{x \in X:\; f(x) > w\} \;\subseteq\; \{x \in X:\; f(x) > v\}.$$

Apliquemos la propiedad creciente de μ y luego la suposición que $v \in \mathcal{U}(f,\mu)$:

$$\mu(\{x \in X:\; f(x) > w\}) \le \mu(\{x \in X:\; f(x) > v\}) = 0.$$

Hemos mostrado que $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$.

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) := \Big\{ v \in [0,+\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \; := \; \Big\{ v \in [0, +\infty] : \quad \mu(\{x \in X : \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Supongamos que $w > \alpha$.

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Supongamos que $w > \alpha$.

Entonces, por la definición de ínf,

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f, \mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Supongamos que $w > \alpha$.

Entonces, por la definición de ínf, existe v en $\mathcal{U}(f, \mu)$ tal que $v < w$.

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \ := \ \Big\{ v \in [0,+\infty]\colon \quad \mu(\{x \in X\colon \ f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Supongamos que $w > \alpha$.

Entonces, por la definición de ínf, existe v en $\mathcal{U}(f,\mu)$ tal que $v < w$.

Por la parte I de la demostración,

II. Demostremos que si $w > \alpha$, entonces $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$

$$\mathcal{U}(f,\mu) \;:=\; \Big\{ v \in [0,+\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \; f(x) > v\}) = 0 \Big\}, \qquad \alpha := \operatorname{ínf}(\mathcal{U}(f,\mu)).$$

Supongamos que $w > \alpha$.

Entonces, por la definición de ínf, existe v en $\mathcal{U}(f,\mu)$ tal que $v < w$.

Por la parte I de la demostración, $w \in \mathcal{U}(f,\mu)$.

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

$$\{x \in X : \quad f(x) > \alpha\}$$

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

$$\{x \in X : \quad f(x) > \alpha\} \; =$$

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

$$\{x \in X : \quad f(x) > \alpha\} \;=\; \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X : \quad f(x) > \alpha + \frac{1}{p}\right\}.$$

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f, \mu)$

Sabemos que

$$]\alpha, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

$$\{x \in X: \quad f(x) > \alpha\} \; = \; \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X: \quad f(x) > \alpha + \frac{1}{p}\right\}.$$

Por la parte II de la demostración, $\alpha + \frac{1}{p} \in \mathcal{U}(f, \mu)$ para cada p en $\mathbb{N}$.

III. Demostremos que $\alpha \in \mathcal{U}(f,\mu)$

Sabemos que

$$]\alpha,+\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left]\alpha + \frac{1}{p}, +\infty\right].$$

Pasamos a las preimágenes respecto a f:

$$\{x \in X:\quad f(x) > \alpha\} \;=\; \bigcup_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X:\quad f(x) > \alpha + \frac{1}{p}\right\}.$$

Por la parte II de la demostración, $\alpha + \frac{1}{p} \in \mathcal{U}(f,\mu)$ para cada p en $\mathbb{N}$.

Usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(\{x \in X:\; f(x) > \alpha\}) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(\{x \in X:\; f(x) > \alpha + 1/p\}) = 0.$$

Corolario

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f.$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) :=$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) =$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R},\mu} f =$$

Ejemplo

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Consideremos a la función indicadora del conjunto $\mathbb{Q}$:

$$f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}},$$

esto es,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{U}(f, \mu) = [0, +\infty].$$

Por lo tanto,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R},\mu} f = 0.$$

Ejercicio

Inventar alguna notación breve para el conjunto

$$\{x \in X : \; f(x) > v\},$$

y escribir la demostración anterior con esta notación.

Plan

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

Ejercicio: demostrar la proposición. Sugerencias:

- si $f(x) \leq \alpha$ y $g(x) \leq \beta$, entonces $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$;

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

Ejercicio: demostrar la proposición. Sugerencias:

- si $f(x) \leq \alpha$ y $g(x) \leq \beta$, entonces $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$;
- si $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$, entonces

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

Ejercicio: demostrar la proposición. Sugerencias:

- si $f(x) \leq \alpha$ y $g(x) \leq \beta$, entonces $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$;
- si $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$, entonces $f(x) > \alpha$ o $g(x) > \beta$.

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \le \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

Ejercicio: demostrar la proposición. Sugerencias:

- si $f(x) \le \alpha$ y $g(x) \le \beta$, entonces $f(x) + g(x) \le \alpha + \beta$;
- si $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$, entonces $f(x) > \alpha$ o $g(x) > \beta$.
- $\{x \in X\colon\ (f+g)(x) > \alpha + \beta\}$

La propiedad subaditiva

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f+g) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f) + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(g).$$

Ejercicio: demostrar la proposición. Sugerencias:

- si $f(x) \leq \alpha$ y $g(x) \leq \beta$, entonces $f(x) + g(x) \leq \alpha + \beta$;
- si $f(x) + g(x) > \alpha + \beta$, entonces $f(x) > \alpha$ o $g(x) > \beta$.
- $\{x \in X\colon\ (f+g)(x) > \alpha + \beta\} \subseteq \{x \in X\colon\ f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X\colon\ g(x) > \beta\}$.

La propiedad homogénea

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\lambda \in [0, +\infty]$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(\lambda f) = \lambda \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f).$$

La propiedad homogénea

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\lambda \in [0, +\infty]$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(\lambda f) = \lambda \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f).$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \xLeftrightarrow{\text{¡explicar bien!}} \qquad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \xLeftrightarrow{\text{¡explicar bien!}} \qquad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

$$\Longleftrightarrow$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \xLeftrightarrow{\text{¡explicar bien!}} \qquad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \mu\big(\{x \in X : \ f(x) > 0\}\big) = 0$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \quad &\xLeftrightarrow{\text{¡explicar bien!}} \quad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in X : \ f(x) > 0\}\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

¿Cuándo $\operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad & \xLeftrightarrow{\text{¡explicar bien!}} \qquad 0 \in \mathcal{U}(f, \mu) \\
& \Longleftrightarrow \qquad \mu\big(\{x \in X : \; f(x) > 0\}\big) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0.
\end{aligned}$$

Plan

La propiedad creciente del supremo esencial

En estos ejercicios suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

La propiedad creciente del supremo esencial

En estos ejercicios suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Ejercicio.

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f \leq \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g.$$

El supremo esencial del máximo de dos funciones

Ejercicio.

Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g = \max\left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f_1,\ \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f_2 \right\}.$$

El supremo esencial del supremo de una sucesión de funciones

Ejercicio.

Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])^{\mathbb{N}}$. Definimos $g\colon X \to [0,+\infty]$,

$$g(x) := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x).$$

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\alpha_k := \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f_k.$$

Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g = \sup_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k.$$

El supremo esencial y la imagen esencial

Ejercicio adicional.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty[)$. Denotemos por $\operatorname{EssRange}(f)$ la imagen esencial de f:

$$\operatorname{EssRange}(f) \;:=\; \Big\{ v \in [0, +\infty[\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X\colon\; v - \varepsilon < f(x) < v + \varepsilon\}) > 0 \Big\}.$$

Demostrar que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = \sup(\operatorname{EssRange}(f)).$$

Más aún, si $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f < +\infty$, demostrar que $\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f$ es el máximo de $\operatorname{EssRange}(f)$.