El primer teorema fundamental de cálculo para funciones Lebesgue integrables (un tema de análisis real)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de noviembre de 2021

Objetivo: demostrar el primer TFC para funciones Lebesgue integrables.

$$\text{Si} \quad f \in L^1([a,b]) \quad \text{y} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{entonces} \quad F' = f \text{ c.t.p.}$$

Prerrequisitos:

- teorema sobre la derivada de una función creciente,
- funciones de variación acotada y sus propiedades,
- funciones absolutamente continuas y algunas de sus propiedades básicas,
- proposición sobre la integral nula de una función positiva,
- teorema de la convergencia acotada,
- propiedad regular de la medida de Lebesgue.

Plan

Repaso: teorema sobre la derivada de una función monótona

Teorema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces f es derivable c.t.p. Más aún,

$$\int_a^b f' \, \mathrm{d}\mu \le f(b) - f(a).$$

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f se descompone en una combinación lineal de cuatro funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}(g_3 - g_4).$$

Repaso: funciones de variación acotada

Proposición

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$, entonces existen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que $f = g - h$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f se descompone en una combinación lineal de cuatro funciones crecientes:

$$f = (g_1 - g_2) + \mathrm{i}(g_3 - g_4).$$

Corolario

Si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f es derivable c.t.p. y $f' \in L^1([a,b],\mathbb{C})$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq C([a, b])$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Teorema

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b])$.

Repaso: funciones absolutamente continuas

Proposición

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Teorema

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b])$.

Corolario

Si $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, entonces f es derivable c.t.p.

Repaso: la integral con límite superior variable es AC

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f\,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Corolarios:

Repaso: la integral con límite superior variable es AC

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Corolarios:

- $F \in C([a,b],\mathbb{C})$, $F \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$,
- F es derivable c.t.p., $F' \in L^1([a,b],\mathbb{C})$.

Repaso: la integral nula de una función positiva

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible.

Supongamos que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Repaso: la integral nula de una función positiva

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible.

Supongamos que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $f = 0$ c.t.p.

Repaso: teorema de la convergencia acotada

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita,
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles,
$f_n \to g$ de manera puntual o c.t.p.
Además, supongamos que existe $M \geq 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe K compacto tal que

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe K compacto tal que

$$K \subseteq A, \qquad \mu(K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces

$$\mu(A) =$$

Repaso: propiedad regular por abajo de la medida de Lebesgue

Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue y sea μ la medida de Lebesgue.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe K compacto tal que

$$K \subseteq A, \qquad \mu(K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, entonces

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subseteq A,\ K \text{ es compacto}\}.$$

Lema (sobre las integrales nulas con límite superior variable)

Sea $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Definimos $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$F(x) := \int_a^x f \, \mathrm{d}\mu.$$

Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a, b]$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Lema (sobre las integrales nulas con límite superior variable)

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$F(x) := \int_a^x f \,\mathrm{d}\mu.$$

Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a,b]$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Idea de demostración. La condición del lema implica que para cada α, β en $[a,b]$

$$\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}\mu = F(\beta) - F(\alpha) = 0.$$

Cada conjunto medible se puede aproximar por una unión de intervalos.

Demostración del lema, inicio. Sea

$$E := \{x \in (a, b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ implica que E es medible.

Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Demostración del lema, inicio. Sea

$$E := \{x \in (a, b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ implica que E es medible.
Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Usemos el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo y elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

Demostración del lema, inicio. Sea

$$E := \{x \in (a, b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ implica que E es medible.
Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Usemos el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo y elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

Demostración del lema, inicio. Sea

$$E := \{x \in (a, b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ implica que E es medible.
Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Usemos el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo
y elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{n \in J} (\alpha_n, \beta_n),$$

donde $((\alpha_n, \beta_n))_{n \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos. $\Rightarrow$

Demostración del lema, final.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{n \in J} (\alpha_n, \beta_n) \right).$$

Demostración del lema, final.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{n \in J} (\alpha_n, \beta_n) \right).$$

De aquí,

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{n \in J} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración del lema, final.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{n \in J} (\alpha_n, \beta_n) \right).$$

De aquí,

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{n \in J} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, como $f > 0$ en K y $\mu(K) > 0$, tenemos $\int_K f \, \mathrm{d}\mu > 0$.
Esta contradicción muestra que $\mu(E) = 0$.

Demostración del lema, final.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{n \in J} (\alpha_n, \beta_n) \right).$$

De aquí,

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{n \in J} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, como $f > 0$ en K y $\mu(K) > 0$, tenemos $\int_K f \, \mathrm{d}\mu > 0$.
Esta contradicción muestra que $\mu(E) = 0$.

De manera similar, $\mu(\{x \in [a, b] \colon \; f(x) < 0\}) = 0$. □

TFC para un punto de continuidad

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

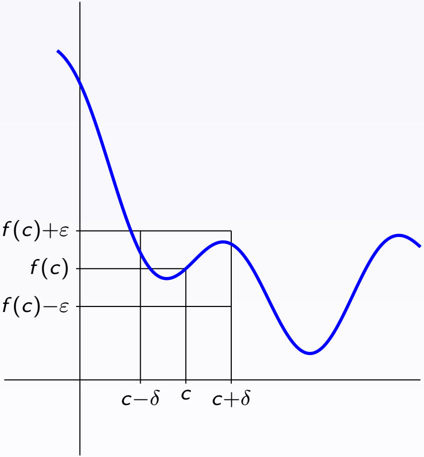
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supongamos que $c \in [a,b]$ y f es continua en c.

Entonces $F'(c) = f(c)$, esto es,

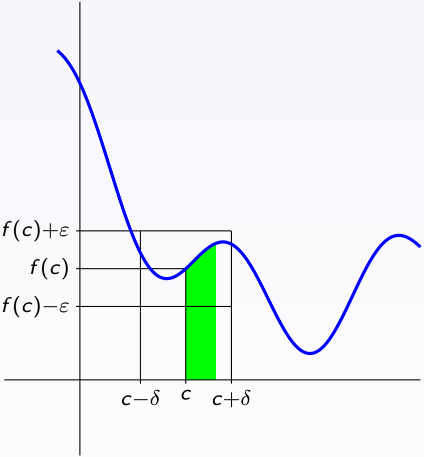
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ c+h\in[a,b]}} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad



Si $|t-c| < \delta$, entonces $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad

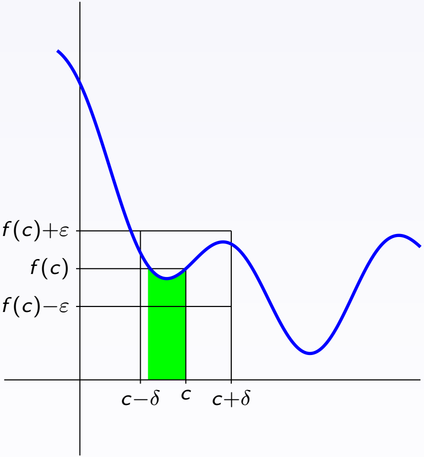


Si $|t-c| < \delta$, entonces $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Para $0 < h < \delta$,

$$\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t \approx hf(c).$$

Idea: la situación cerca de un punto de continuidad



Si $|t-c| < \delta$, entonces $|f(t)-f(c)| < \varepsilon$.

Para $0 < h < \delta$,

$$\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t \approx hf(c).$$

Para $-\delta < h < 0$,

$$\int_{c+h}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t \approx |h|f(c).$$

Inicio de la demostración.

$\Longrightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

$\Longrightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que

$\Longrightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$\Longrightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Longrightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right|$$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| =$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right|$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leq$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\frac{\varepsilon}{2} <\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Inicio de la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en c, elegimos $\delta > 0$ tal que si $t \in [a, b]$ y $|t - c| < \delta$, entonces

$$|f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$.

Si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right|$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| =$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right|$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right|$$

$$=$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le
\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x \le\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} <\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x) - f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\ &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x)-f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Final de la demostración.

Si $-\delta < h < 0$ y $c + h \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c f(c)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_{c+h}^c |f(x) - f(c)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c). \qquad \square$$

TFC para funciones continuas, aproximación por la sucesión $c + 1/n$

Hemos demostrado el TFC para las funciones continuas.

En particular, este resultado implica que si $u \in C([a,b])$ y $c \in (a,b)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} u(t)\,\mathrm{d}t \right) = u(c).$$

TFC para $f \in L^\infty$

TFC para las funciones acotadas

Sea $f \in L^\infty([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. x en (a,b).

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f.

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a “suavizar” la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a “suavizar” la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) =$$

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a “suavizar” la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x + 1/n) - F(x)) =$$

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a “suavizar” la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x+1/n) - F(x)) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x + 1/n) - F(x)) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Sabemos que F es derivable c.t.p. (¡recordar por qué!)

Inicio de la demostración.

Sea $K := \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Vamos a "suavizar" la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$,

$$g_n(x) := n \int_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$.

Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\,(F(x + 1/n) - F(x)) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Sabemos que F es derivable c.t.p. (¡recordar por qué!)

Por la definición de la derivada, $g_n(x) \to F'(x)$ para casi todo x. $\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a,b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a,c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x =$$

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x + 1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a,b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a,c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^c (F(x+1/n)-F(x))\,\mathrm{d}x\right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$\Longrightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x + 1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a+1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración.

Dado c en (a, b), aplicamos el teorema de la convergencia acotada en $[a, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,\mathrm{d}x \right).$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cancelamos la integral sobre $[a + 1/n, c]$:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

$\Rightarrow$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) =$$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right) - \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(n \int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right) - \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hemos mostrado que

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall c \in [a, b].$$

Final de la demostración.

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right) - \lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n} F(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Para calcular los últimos límites, aplicamos el TFC para funciones continuas:

$$\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hemos mostrado que

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall c \in [a,b].$$

Por el lema sobre las integrales nulas, $F' = f$ c.t.p. $\square$

Estamos listos para demostrar el resultado principal de esta plática.

El primer teorema fundamental de cálculo para funciones Lebesgue integrables

Sea $f \in L^1([a, b])$. Definimos $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces $F' = f$ c.t.p.

Inicio de demostración.

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces

Inicio de demostración.

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces

- g_n es acotada para cada n,

Inicio de demostración.

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces

- g_n es acotada para cada n,
- $g_n(x) \nearrow f(x)$ para cada x en $[a, b]$,

Inicio de demostración.

Cada función compleja es una combinación lineal de cuatro funciones positivas.

Por eso, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $f \geq 0$.

Pongamos

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces

- g_n es acotada para cada n,
- $g_n(x) \nearrow f(x)$ para cada x en $[a, b]$,
- $f = g_n + (f - g_n)$.

$\Rightarrow$

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

$$F' = G_n' + H_n' \geq G_n' = g_n \text{ c.t.p.}$$

Continuación de la demostración. Como $f = g_n + (f - g_n)$,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t}_{G_n(x)} + \underbrace{\int_a^x (f(t) - g_n(t))\,\mathrm{d}t}_{H_n(x)}.$$

Analicemos las propiedades de los dos sumandos.

- Por el TFC para funciones acotadas, $G_n' = g_n$ c.t.p.
- H_n es creciente, luego H_n es derivable c.t.p. y $H_n' \geq 0$ c.t.p.

Luego

$$F' = G_n' + H_n' \geq G_n' = g_n \text{ c.t.p.}$$

Como n es arbitrario y $g_n \to f$, obtenemos $F' \geq f$ c.t.p. $\Rightarrow$

Final de la demostración.

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Final de la demostración.

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Final de la demostración.

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esto significa que

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Final de la demostración.

Hemos mostrado que $F' \geq f$ c.t.p.

Por otro lado, por el teorema sobre la derivada de una función creciente:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esto significa que

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Como $F' - f \geq 0$, concluimos que $F' - f = 0$ c.t.p. $\square$