

# Criterio de límite en términos de sucesiones (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

2021-11-19

**Objetivo:**

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

**Objetivo:**

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

**Prerrequisitos:**

espacios métricos, espacios topológicos, base de vecindades.

**Objetivo:**

demostrar el teorema de Heine, es decir, el criterio de límite en términos de sucesiones.

**Prerrequisitos:**

espacios métricos, espacios topológicos, base de vecindades.

**Una de aplicaciones futuras:**

aplicar el teorema de la convergencia dominada a familias de funciones, no necesariamente numerables.

## Vecindades y límites

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

## Vecindades y límites

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

Dado  $a$  en  $X$ , pongamos  $\tau(a) := \{V \in \tau: a \in V\}$ .

## Vecindades y límites

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

Dado  $a$  en  $X$ , pongamos  $\tau(a) := \{V \in \tau : a \in V\}$ .

Recordemos la **definición del límite**.

## Vecindades y límites

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

Dado  $a$  en  $X$ , pongamos  $\tau(a) := \{V \in \tau : a \in V\}$ .

Recordemos la **definición del límite**.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ ,  $f: X \rightarrow Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$



## Variaciones de la definición del límite

### Definición 1.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $D \subseteq X$ ,  $f: D \rightarrow Y$ ,  $a \in \text{cl}(D)$ ,  $b \in Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

## Variaciones de la definición del límite

### Definición 1.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $D \subseteq X$ ,  $f: D \rightarrow Y$ ,  $a \in \text{cl}(D)$ ,  $b \in Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

### Definición 2.

En las mismas suposiciones,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[D \cap V] \subseteq Q.$$

## Variaciones de la definición del límite

### Definición 1.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $D \subseteq X$ ,  $f: D \rightarrow Y$ ,  $a \in \text{cl}(D)$ ,  $b \in Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[D \cap (V \setminus \{a\})] \subseteq Q.$$

### Definición 2.

En las mismas suposiciones,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[D \cap V] \subseteq Q.$$

En general, las Definiciones 1 y 2 no son equivalentes.

Hay casos particulares, cuando son equivalentes: 1) si  $a \notin D$ ; 2) si  $f(a) = b$ .

## Una base local de una topología en un punto

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $a \in X$ .

Una colección  $\mathcal{W}$  se llama **base local** de  $\tau$  en  $a$ , si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$ ,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$ .

## Una base local de una topología en un punto

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $a \in X$ .

Una colección  $\mathcal{W}$  se llama **base local** de  $\tau$  en  $a$ , si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$ ,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$ .

**Ejemplo trivial:**  $\tau(a)$  es una base local de  $\tau$  en  $a$ .

## Una base local de una topología en un punto

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $a \in X$ .

Una colección  $\mathcal{W}$  se llama **base local** de  $\tau$  en  $a$ , si cumple con dos propiedades:

- $\mathcal{W} \subseteq \tau(a)$ ,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad W \subseteq V$ .

**Ejemplo trivial:**  $\tau(a)$  es una base local de  $\tau$  en  $a$ .

En vez de una colección, a veces es más cómodo trabajar con una familia.

Una familia  $(W_k)_{k \in J}$  se llama base local de  $\tau$  en  $a$ ,

si cumple con dos propiedades:

- $\{W_k : k \in J\} \subseteq \tau(a)$ ,
- $\forall V \in \tau(a) \quad \exists k \in J \quad W_k \subseteq V$ .

## Criterio de límite en términos de bases de vecindades

### Ejercicio.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ .

Sea  $\mathcal{W}$  una base local de  $\tau_X$  en  $a$ , sea  $\mathcal{Q}$  una base local de  $\tau_Y$  en  $b$ .

Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall Q \in \mathcal{Q} \quad \exists W \in \mathcal{W} \quad f[W \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

## Bases locales numerables decrecientes

### Proposición

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, sea  $a \in X$ ,  
y sea  $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una base local numerable de  $\tau$  en  $a$ .

Para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$  pongamos

$$W_k := \bigcap_{j=1}^k P_j.$$

Entonces  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  también es una base local de  $\tau$  en  $a$ , y la sucesión  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es decreciente.



## Bases locales numerables decrecientes

### Proposición

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, sea  $a \in X$ ,  
y sea  $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una base local numerable de  $\tau$  en  $a$ .

Para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$  pongamos

$$W_k := \bigcap_{j=1}^k P_j.$$

Entonces  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  también es una base local de  $\tau$  en  $a$ , y la sucesión  $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es decreciente.

**Ejercicio simple: demostrar la proposición.**

## Ejemplos de bases locales numerables

### Ejercicio.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\tau_d$  la topología inducida por la métrica  $d$ .

Para cada  $a$  en  $X$  y cada  $r > 0$ ,

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Demostrar que la sucesión de bolas

$$(B(a, 1/q))_{q \in \mathbb{N}}$$

es una base local de  $\tau_d$  en  $a$ .

## Ejemplos de bases locales numerables

### Ejercicio.

Recordar la definición de la topología canónica  $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$  del eje real extendido  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ .

Demostrar que la sucesión de intervalos

$$\left( (m, +\infty] \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

es una base local de la topología  $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$  en el punto  $+\infty$ .

## Criterio de límite en términos de sucesiones

### Teorema

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ .

Supongamos que existe una base local numerable de la topología  $\tau_X$  en el punto  $a$ .

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ;

(b) para cualquier sucesión  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $X \setminus \{a\}$ , si  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = a$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = b$ .

## Criterio de límite en términos de sucesiones

### Teorema

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ .

Supongamos que existe una base local numerable de la topología  $\tau_X$  en el punto  $a$ .

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ;

(b) para cualquier sucesión  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $X \setminus \{a\}$ , si  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = a$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = b$ .

Heinrich Eduard Heine (1821–1881) fue un matemático alemán.

## Criterio de límite en términos de sucesiones

### Teorema

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ .

Supongamos que existe una base local numerable de la topología  $\tau_X$  en el punto  $a$ .

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ;

(b) para cualquier sucesión  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $X \setminus \{a\}$ , si  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = a$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = b$ .

Heinrich Eduard Heine (1821–1881) fue un matemático alemán.

Demostremos las implicaciones  $(a) \Rightarrow (b)$  y  $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$ .

Demostración  $(a) \Rightarrow (b)$

## Demostración $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$$



## Demostración (a) $\Rightarrow$ (b)

Supongamos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$$

Dado

$$Q \in \tau_Y(b)$$

## Demostración (a) $\Rightarrow$ (b)

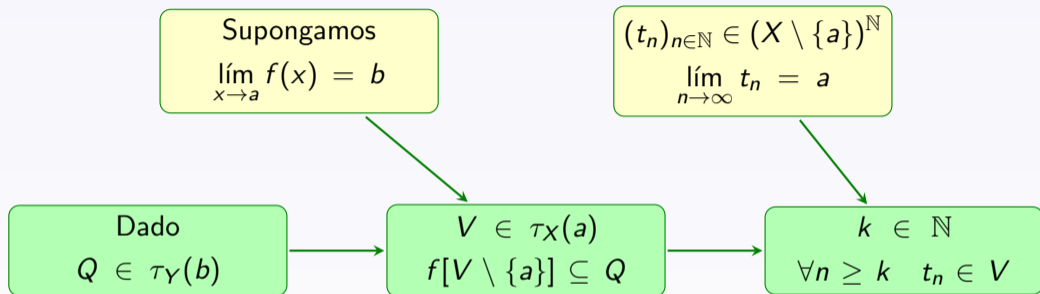
Supongamos  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$

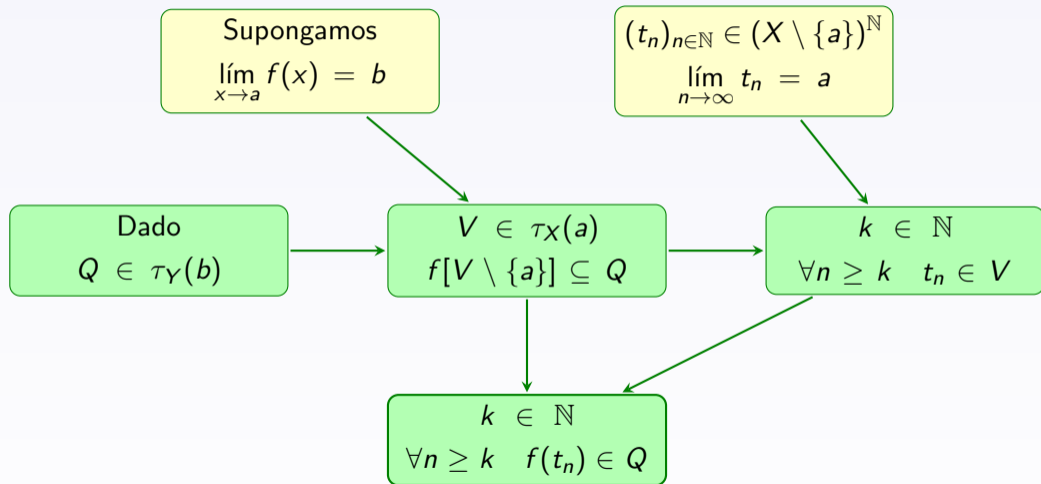
Dado  
 $Q \in \tau_Y(b)$

$V \in \tau_X(a)$   
 $f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q$

## Demostración (a) $\Rightarrow$ (b)



# Demostración $(a) \Rightarrow (b)$



## Demostración $(b) \Rightarrow (a)$ por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

## Demostración $(b) \Rightarrow (a)$ por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \quad \forall V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

## Demostración $(b) \Rightarrow (a)$ por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \quad \forall V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

Elegimos  $E_0$  en  $\tau_Y(b)$  con esta propiedad. Entonces

$$\forall V \in \tau_X(a) \quad \exists x \in V \setminus \{a\} \quad f(x) \notin E_0.$$

## Demostración $(b) \Rightarrow (a)$ por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \quad \forall V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

Elegimos  $E_0$  en  $\tau_Y(b)$  con esta propiedad. Entonces

$$\forall V \in \tau_X(a) \quad \exists x \in V \setminus \{a\} \quad f(x) \notin E_0.$$

Sea  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una base local decreciente de  $\tau_X$  en  $a$ .



## Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, inicio

La condición (a) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall Q \in \tau_Y(b) \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \subseteq Q.$$

Supongamos que (a) no se cumple:

$$\exists Q \in \tau_Y(b) \quad \forall V \in \tau_X(a) \quad f[V \setminus \{a\}] \not\subseteq Q.$$

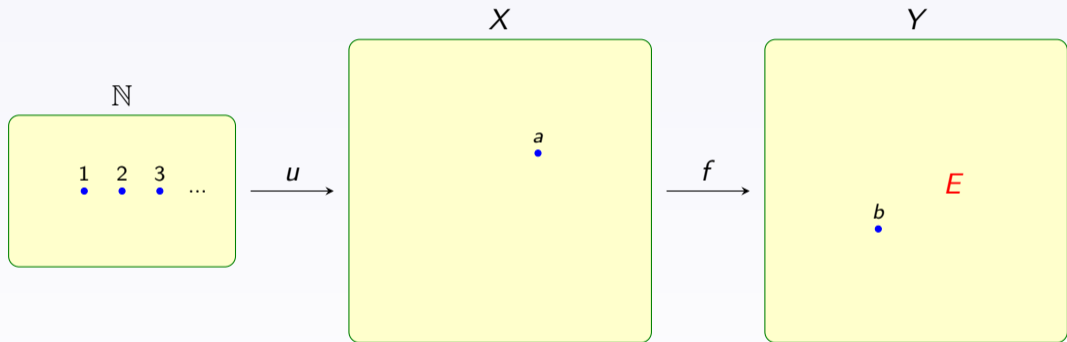
Elegimos  $E_0$  en  $\tau_Y(b)$  con esta propiedad. Entonces

$$\forall V \in \tau_X(a) \quad \exists x \in V \setminus \{a\} \quad f(x) \notin E_0.$$

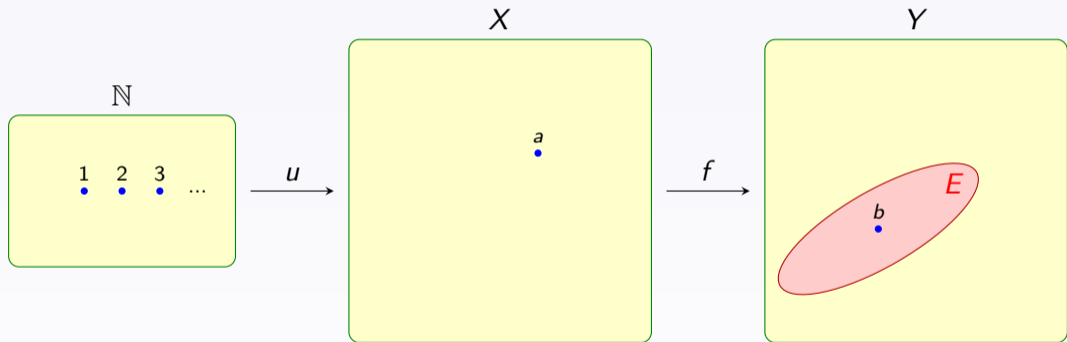
Sea  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una base local decreciente de  $\tau_X$  en  $a$ .

Para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$  encontramos  $u_n \in W_n \setminus \{a\}$  tal que  $f(u_n) \notin E_0$ .

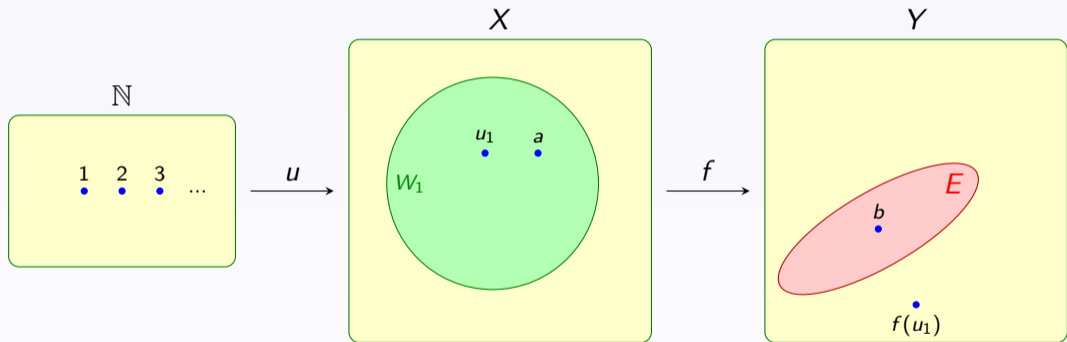
Demostración  $(b) \Rightarrow (a)$  por reducción al absurdo, dibujo



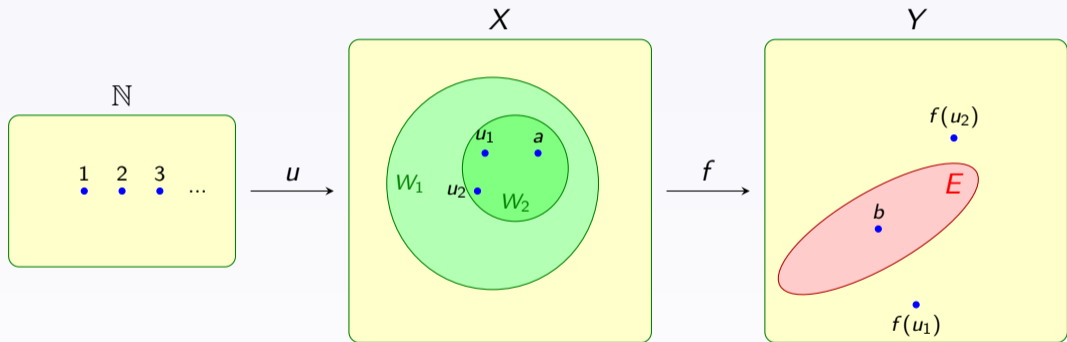
Demostración  $(b) \Rightarrow (a)$  por reducción al absurdo, dibujo



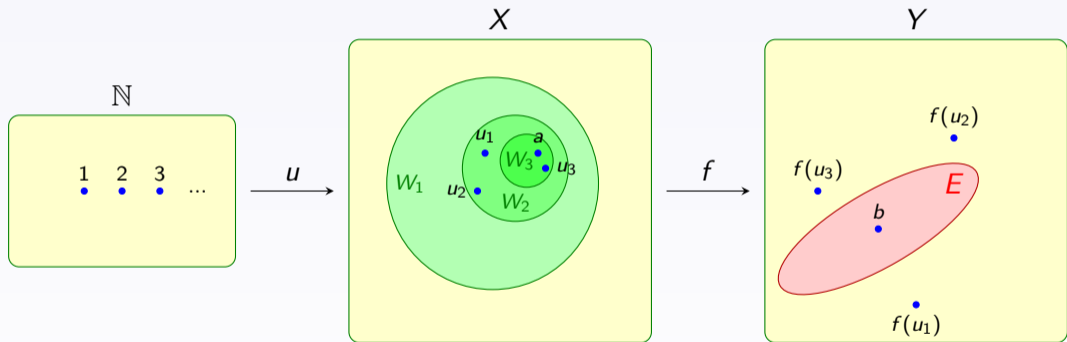
Demostración (b)  $\Rightarrow$  (a) por reducción al absurdo, dibujo



Demostración (b)  $\Rightarrow$  (a) por reducción al absurdo, dibujo



Demostración (b)  $\Rightarrow$  (a) por reducción al absurdo, dibujo



## Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(t_n) \notin E$$

## Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(t_n) \notin E$$

Mostremos que  $u_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Dado  $V$  en  $\tau_X(a)$ , encontramos  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $W_k \subseteq V$ .

Luego para  $n \geq k$  tenemos  $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$ .



## Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(t_n) \notin E$$

Mostremos que  $u_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Dado  $V$  en  $\tau_X(a)$ , encontramos  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $W_k \subseteq V$ .

Luego para  $n \geq k$  tenemos  $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$ .

Mostremos que  $f(u_n) \not\rightarrow b$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En efecto,

$$\exists Q (= E_0) \in \tau_Y(b) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \notin Q.$$

## Demostración (b) $\Rightarrow$ (a) por reducción al absurdo, dibujo

Hemos construido una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n \in W_n \setminus \{a\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(t_n) \notin E$$

Mostremos que  $u_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Dado  $V$  en  $\tau_X(a)$ , encontramos  $k$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $W_k \subseteq V$ .

Luego para  $n \geq k$  tenemos  $u_n \in W_n \subseteq W_k \subseteq V$ .

Mostremos que  $f(u_n) \not\rightarrow b$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En efecto,

$$\exists Q (= E_0) \in \tau_Y(b) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \notin Q.$$

Esto contradice a la suposición (b).

## Criterio de continuidad en términos de sucesiones (Heine)

### Corolario

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ .

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (a)  $f$  es continua en  $a$ ;
- (b) para cualquier sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_k) = f(a)$ .

## Un truco útil: intercalar dos sucesiones

### Ejercicio.

Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sucesiones en  $X$ . Definimos

$$v_n := \begin{cases} t_m, & n = 2m - 1, \\ u_m & n = 2m. \end{cases}$$

Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \left( \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = a \quad \wedge \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_m = a \right).$$

## Criterio de existencia del límite en términos de sucesiones

### Ejercicio.

Sean  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ .

Supongamos que existe una base local numerable de  $\tau$  en  $a$ .

Supongamos que para cada sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X \setminus \{a\}$ ,

si  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ , entonces la sucesión  $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un límite en  $Y$ .

Demostrar que existe  $b$  en  $Y$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .