

Criterio de convexidad para las funciones
definidas en intervalos de los reales,
en términos de las diferencias divididas
(un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-14

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,

caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,
caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Prerrequisitos:

- definición de funciones convexas,
- diferencias divididas del primer y segundo orden,
- los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas de los extremos.

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,
caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Prerrequisitos:

- definición de funciones convexas,
- diferencias divididas del primer y segundo orden,
- los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas de los extremos.

Aplicaciones:

- propiedades de las derivadas laterales de una función convexa,
- criterio de convexidad en términos de las derivadas.

- 1 Repaso: los intervalos son los subconjuntos convexos de \mathbb{R}
- 2 Repaso: la definición de función convexa
- 3 Repaso: las diferencias divididas del primer y segundo orden
- 4 Criterio de función convexa en términos de las diferencias divididas

Los subconjuntos convexos de los reales son los intervalos

Proposición

Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo,
- X es un intervalo, es decir, X tiene una de las siguientes formas (con $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\mathbb{R}, \quad [a, +\infty[, \quad]a, +\infty[, \quad]-\infty, b], \quad]-\infty, b[,$$

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad]a, b[.$$

- $] \inf(X), \sup(X)[\subseteq X$,
- X es conexo,
- X es arco-conexo.

Repaso: los puntos intermedios de un intervalo
son las combinaciones convexas estrictas de los extremos

Proposición

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Pongamos

$$\lambda :=$$

Entonces $0 < \lambda < 1$ y

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Repaso: los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas estrictas de los extremos

Proposición

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Pongamos

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces $0 < \lambda < 1$ y

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas
de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0, 1[$. Pongamos

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \quad ,$$

$$1 - \lambda = \quad .$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas
de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0, 1[$. Pongamos

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

$$1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas
de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0, 1[$. Pongamos

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

$$1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Funciones convexas de una variable real

Sea X un intervalo de \mathbb{R} . Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **convexa** si

$$\forall a, b \in X \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Analizamos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analizamos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Analizamos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analizamos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 1$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analizamos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 1$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot b) = 1 \cdot f(b).$$

Criterio trivial de función convexa (quitando los casos triviales)

Proposición

Sea X un intervalo de \mathbb{R} . Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si, y solo si,

$$\forall (a, b) \in \{(x, y) \in X^2: x \neq y\} \quad \forall \lambda \in]0, 1[$$

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Definición de función estrictamente convexa

Sea X un intervalo de \mathbb{R} . Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa, si

$$\forall (a, b) \in \{(x, y) \in X^2: x \neq y\} \quad \forall \lambda \in]0, 1[$$

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Repaso: diferencias divididas del primer y segundo orden

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Para $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$,

$$\Delta_f(x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Para x_1, x_2, x_3 diferentes a pares,

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) := \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \boxed{} f(x_1) + \boxed{} f(x_2).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Esta fórmula implica que

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$\begin{aligned} \Delta_f(x_1, x_2, x_3) = & \text{[Yellow Box]} f(x_1) \\ & + \text{[Yellow Box]} f(x_2) \\ & + \text{[Yellow Box]} f(x_3). \end{aligned}$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$\begin{aligned}\Delta_f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) \\ &+ \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) \\ &+ \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3).\end{aligned}$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$\begin{aligned}\Delta_f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) \\ &+ \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) \\ &+ \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3).\end{aligned}$$

Esta fórmula implica la simetría de $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ respecto a x_1, x_2, x_3 :

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1, x_3) = \dots$$

El lema principal

Sea X un intervalo de \mathbb{R} , sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Entonces las siguientes desigualdades son equivalentes.

$$(a) \quad f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$(b) \quad \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$$

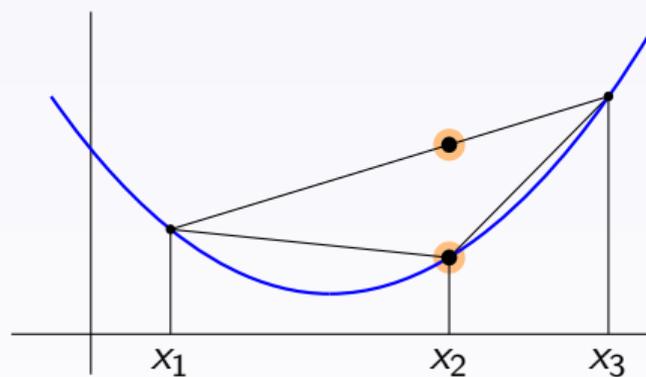
$$(c) \quad \Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

$$(d) \quad \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

$$(e) \quad \Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

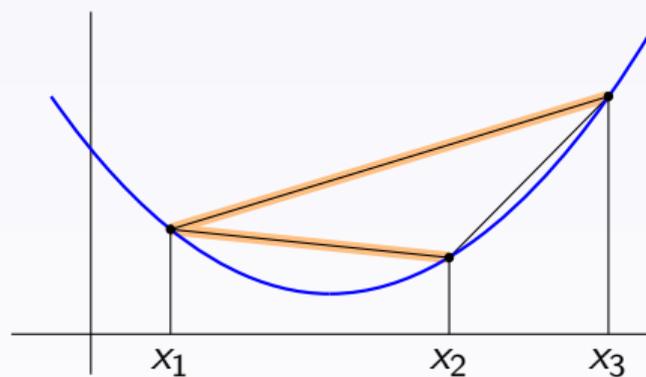
$$(a) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$



Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

$$(a) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$(b) \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$$

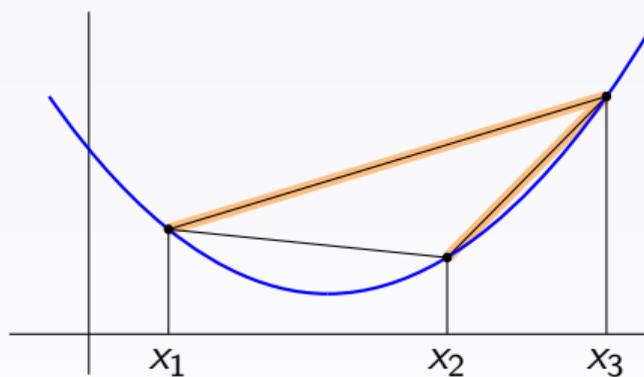


Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

$$(a) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$(b) \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$$

$$(c) \Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$



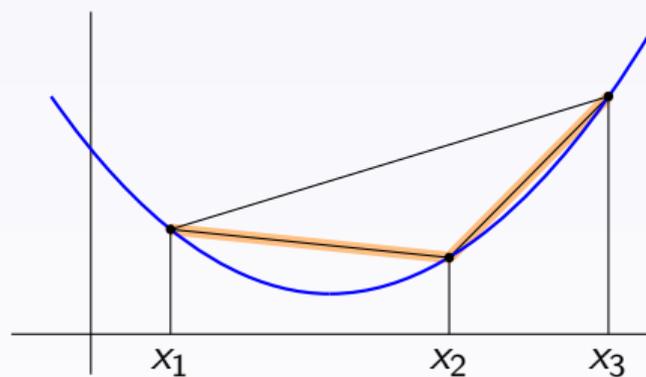
Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

$$(a) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$(b) \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$$

$$(c) \Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

$$(d) \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$



Demostración del lema, (a) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Demostración del lema, (a) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Demostración del lema, (a) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Reagrupamos los términos:

Demostración del lema, (a) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Reagrupamos los términos:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$$

Hemos obtenido (d).

Demostración del lema, $(d) \Rightarrow (a)$

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Demostración del lema, (d) \Rightarrow (a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Demostración del lema, (d) \Rightarrow (a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

Demostración del lema, (d) \Rightarrow (a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Demostración del lema, (d) \Rightarrow (a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Multiplicamos ambos lados por $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$ y dividimos entre $x_3 - x_1$:

Demostración del lema, (d) \Rightarrow (a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Multiplicamos ambos lados por $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$ y dividimos entre $x_3 - x_1$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es 1.

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (f(x_3) - f(x_2)).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es 1.

Obtuvimos (a).

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \quad \Longleftrightarrow$$

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$$

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$$
$$\quad \quad \quad \Longleftrightarrow_{x_3 - x_1 > 0}$$

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\begin{aligned} \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) &\iff \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0 \\ &\stackrel{x_3 - x_1 > 0}{\iff} \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\begin{aligned} \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) & \iff \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0 \\ & \xrightarrow{x_3 - x_1 > 0} \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \geq 0 \\ & \iff \end{aligned}$$

Demostración del lema, (d) \Leftrightarrow (e)

$$\begin{aligned} \Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) & \iff \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0 \\ & \xrightarrow{x_3 - x_1 > 0} \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \geq 0 \\ & \iff \Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0. \end{aligned}$$

Ejercicio: el resto de la demostración

Ejercicio. Demostrar las implicaciones

- $(a) \Rightarrow (b)$,
- $(b) \Rightarrow (a)$,
- $(a) \Rightarrow (c)$,
- $(c) \Rightarrow (a)$.

Criterio de convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden

Teorema

Sea X un intervalo de \mathbb{R} y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) f es convexa;
- (b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;
- (c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;
- (d) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.
- (e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X , diferentes a pares.

Criterio de convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden

Teorema

Sea X un intervalo de \mathbb{R} y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) f es convexa;
- (b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;
- (c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;
- (d) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.
- (e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X , diferentes a pares.

La demostración sale fácilmente del lema y de otras ideas que ya vimos.

Demostración del teorema, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Demostración del teorema, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración del teorema, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda :=$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que $0 < \lambda < 1$ y $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$.

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que $0 < \lambda < 1$ y $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$.

Por la suposición que f es convexa, tenemos

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Es la desigualdad (a) del lema.

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Es la desigualdad (a) del lema.

Luego se cumple la desigualdad (b) del lema:

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$$

Demostración del teorema, $(b) \Rightarrow (a)$

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Demostración del teorema, $(b) \Rightarrow (a)$

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X , los denotamos por x_1, x_3 .

Demostración del teorema, $(b) \Rightarrow (a)$

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X , los denotamos por x_1, x_3 .

Consideremos el caso $x_1 < x_3$, porque

- el caso $x_1 = x_3$ es trivial,
- el caso $x_1 > x_3$ es similar.

Demostración del teorema, $(b) \Rightarrow (a)$

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X , los denotamos por x_1, x_3 .

Consideremos el caso $x_1 < x_3$, porque

- el caso $x_1 = x_3$ es trivial,
- el caso $x_1 > x_3$ es similar.

Sea $\lambda \in [0, 1]$. Los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son triviales, por eso suponemos que $0 < \lambda < 1$.

Definimos x_2 como

$$x_2 :=$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda =$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda =$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Por el lema, de la desigualdad (b) sale (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Por el lema, de la desigualdad (b) sale (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Luego

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a) \Rightarrow (e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a) \Rightarrow (e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2 :

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) =$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a) \Rightarrow (e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2 :

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2)$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a) \Rightarrow (e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2 :

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) \geq 0.$$

Demostración del teorema, (a) \Rightarrow (e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a) \Rightarrow (e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2 :

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) \geq 0.$$

Los demás casos se consideran de manera similar.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

$(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (a)$, $(e) \Rightarrow (a)$.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

$(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (a)$, $(e) \Rightarrow (a)$.

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

$(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (a)$, $(e) \Rightarrow (a)$.

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema similar para las funciones estrictamente convexas.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

$(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (a)$, $(e) \Rightarrow (a)$.

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema similar para las funciones estrictamente convexas.

Ejercicio. Sea $X = [0, +\infty[$ y sea $f(t) := t^3$.

Escribir $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como un polinomio en las variables x_1, x_2, x_3 .

Demostrar que f es convexa.