Criterio de convexidad para las funciones definidas en intervalos de los reales, en términos de las diferencias divididas (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-14

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}$,

caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}$,
caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Prerrequisitos:

- definición de funciones convexas,
- diferencias divididas del primer y segundo orden,
- los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas de los extremos.

Objetivo:

dado un intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}$,
caracterizar la convexidad de f en términos de sus diferencias divididas.

Prerrequisitos:

- definición de funciones convexas,
- diferencias divididas del primer y segundo orden,
- los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas de los extremos.

Aplicaciones:

- propiedades de las derivadas laterales de una función convexa,
- criterio de convexidad en términos de las derivadas.

1. Repaso: los intervalos son los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$
2. Repaso: la definición de función convexa
3. Repaso: las diferencias divididas del primer y segundo orden
4. Criterio de función convexa en términos de las diferencias divididas

Los subconjuntos convexos de los reales son los intervalos

Proposición

Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo,
- X es un intervalo, es decir, X tiene una de las siguientes formas (con $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\mathbb{R}, \quad [a, +\infty[\,, \quad]a, +\infty[\,, \quad]-\infty, b], \quad]-\infty, b[\,,$$

$$[a, b], \quad [a, b[\,, \quad]a, b], \quad]a, b[\,.$$

- $]\operatorname{ínf}(X), \sup(X)[\, \subseteq X$,
- X es conexo,
- X es arco-conexo.

Repaso: los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas estrictas de los extremos

Proposición

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Pongamos

$$\lambda :=$$

Entonces $0 < \lambda < 1$ y

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Repaso: los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas estrictas de los extremos

Proposición

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Pongamos

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces $0 < \lambda < 1$ y

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0,1[$. Pongamos

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \qquad , \qquad 1-\lambda = \qquad .$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0, 1[$. Pongamos

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\boxed{\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},} \qquad \boxed{1 - \lambda = \qquad .}$$

Repaso: las combinaciones convexas estrictas de los extremos de un intervalo son sus puntos intermedios

Proposición

Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in]0,1[$. Pongamos

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\boxed{\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},} \qquad \boxed{1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.}$$

Funciones convexas de una variable real

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada convexa si

$$\forall a, b \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a=b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a=b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1\cdot a) = 1\cdot f(a).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a = b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1 \cdot a) = 1 \cdot f(a).$$

Cuando $\lambda = 1$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

Analicemos algunos casos triviales en la desigualdad

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).$$

Cuando $a=b$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1\cdot a)=1\cdot f(a).$$

Cuando $\lambda=0$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1\cdot a)=1\cdot f(a).$$

Cuando $\lambda=1$, para cualquier función f se cumple la igualdad:

$$f(1\cdot b)=1\cdot f(b).$$

Criterio trivial de función convexa (quitando los casos triviales)

Proposición

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es convexa si, y solo si,

$$\forall (a,b) \in \{(x,y) \in X^2 :\ x \neq y\} \qquad \forall \lambda \in]0,1[$$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Definición de función estrictamente convexa

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f: X \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa, si

$$\forall (a,b) \in \{(x,y) \in X^2 : \ x \neq y\} \qquad \forall \lambda \in]0,1[$$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Repaso: diferencias divididas del primer y segundo orden

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Para $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$,

$$\Delta_f(x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Para x_1, x_2, x_3 diferentes a pares,

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) := \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \boxed{}\, f(x_1) + \boxed{}\, f(x_2).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Esta fórmula implica que

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$
\begin{aligned}
\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = {} & \qquad\qquad\qquad f(x_1) \\
+ {} & \qquad\qquad\qquad f(x_2) \\
+ {} & \qquad\qquad\qquad f(x_3).
\end{aligned}
$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$\begin{aligned}\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = {} & \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, f(x_1) \\ & + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, f(x_2) \\ & + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, f(x_3).\end{aligned}$$

Repaso: $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$

$$\begin{aligned}\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = {} & \boxed{\frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}\, f(x_1) \\ & + \boxed{\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}}\, f(x_2) \\ & + \boxed{\frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}\, f(x_3).\end{aligned}$$

Esta fórmula implica la simetría de $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ respecto a x_1, x_2, x_3:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1, x_3) = \ldots.$$

El lema principal

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ y sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Entonces las siguientes desigualdades son equivalentes.

(a) $f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$.

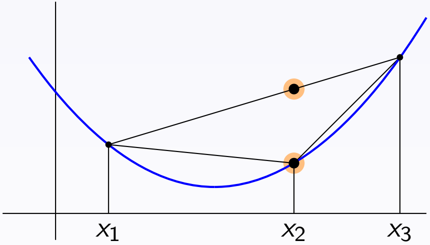
(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$.

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$.

Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

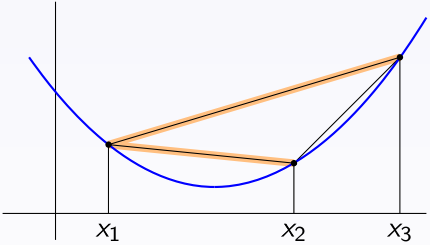
(a) $f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$



Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

(a) $f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$.

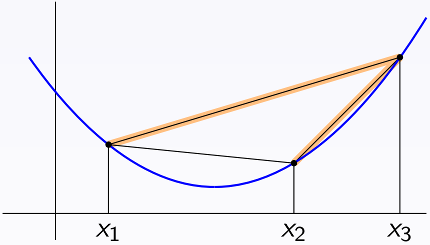


Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

(a) $f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$



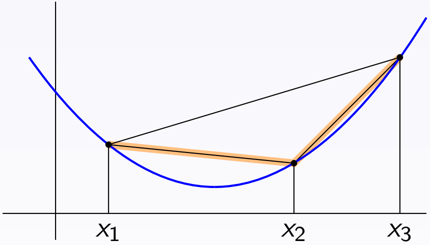
Ejercicio: entender el sentido geométrico de las condiciones (a)–(d)

(a) $f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3).$

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$



Demostración del lema, (a)⇒(d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Demostración del lema, (a)⇒(d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Demostración del lema, (a)$\Rightarrow$(d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Reagrupamos los términos:

Demostración del lema, (a)$\Rightarrow$(d)

Supongamos que se cumple (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$, luego

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Reagrupamos los términos:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \big(f(x_2) - f(x_1) \big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \big(f(x_3) - f(x_2) \big).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3)$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$ y dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Esto significa que

$$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$$

Hemos obtenido (d).

Demostración del lema, (d)$\Rightarrow$(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Demostración del lema, (d)$\Rightarrow$(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Demostración del lema, (d)⇒(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

Demostración del lema, (d)⇒(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Demostración del lema, (d)$\Rightarrow$(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Multiplicamos ambos lados por $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$ y dividimos entre $x_3 - x_1$:

Demostración del lema, (d)⇒(a)

Hacemos el razonamiento anterior en el orden invertido.

Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3).$$

Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Multiplicamos ambos lados por $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$ y dividimos entre $x_3 - x_1$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_2) - f(x_1)\bigr) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_3) - f(x_2)\bigr).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\left(f(x_2) - f(x_1)\right) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\left(f(x_3) - f(x_2)\right).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\left(f(x_2) - f(x_1)\right) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\left(f(x_3) - f(x_2)\right).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_2) - f(x_1)\bigr) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_3) - f(x_2)\bigr).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_2) - f(x_1)\bigr) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\bigl(f(x_3) - f(x_2)\bigr).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es 1.

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Separamos las moscas de las albóndigas:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es 1.

Obtuvimos (a).

Demostración del lema, (d)⇔(e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \qquad \Longleftrightarrow$$

Demostración del lema, (d)$\Leftrightarrow$(e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$$

Demostración del lema, (d)⇔(e)

$$\Delta_f(x_1,x_2) \le \Delta_f(x_2,x_3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_f(x_2,x_3) - \Delta_f(x_1,x_2) \ge 0$$

$$\xLeftrightarrow{x_3 - x_1 > 0}$$

Demostración del lema, (d)$\Leftrightarrow$(e)

$$\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_2, x_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$$

$$\xLeftrightarrow{x_3 - x_1 > 0} \quad \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \geq 0$$

Demostración del lema, (d)$\Leftrightarrow$(e)

$$\Delta_f(x_1,x_2) \leq \Delta_f(x_2,x_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_2,x_3) - \Delta_f(x_1,x_2) \geq 0$$

$$\xLeftrightarrow{x_3 - x_1 > 0} \quad \frac{\Delta_f(x_2,x_3) - \Delta_f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

Demostración del lema, (d)$\Leftrightarrow$(e)

$$\begin{aligned}
\Delta_f(x_1,x_2) \le \Delta_f(x_2,x_3) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_2,x_3) - \Delta_f(x_1,x_2) \ge 0 \\
&\xLeftrightarrow{x_3 - x_1 > 0} \quad \frac{\Delta_f(x_2,x_3) - \Delta_f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1} \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta_f(x_1,x_2,x_3) \ge 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio: el resto de la demostración

Ejercicio. Demostrar las implicaciones

- (a)$\Rightarrow$(b),
- (b)$\Rightarrow$(a),
- (a)$\Rightarrow$(c),
- (c)$\Rightarrow$(a).

Criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden

Teorema

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X, diferentes a pares.

Criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden

Teorema

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X, diferentes a pares.

La demostración sale fácilmente del lema y de otras ideas que ya vimos.

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración del teorema, (a)⇒(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda \coloneqq$$

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que

Demostración del teorema, (a)⇒(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que $0 < \lambda < 1$ y $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$.

Demostración del teorema, (a)⇒(b)

Supongamos que f es convexa. Queremos demostrar (b).

Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

$$\lambda := \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces sabemos que $0 < \lambda < 1$ y $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$.

Por la suposición que f es convexa, tenemos

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2).$$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2).$$

Es la desigualdad (a) del lema.

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_2).$$

Es la desigualdad (a) del lema.

Luego se cumple la desigualdad (b) del lema:

$$\Delta_f(x_1,x_2) \leq \Delta_f(x_1,x_3).$$

Demostración del teorema, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Demostración del teorema, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X, los denotamos por x_1, x_3.

Demostración del teorema, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X, los denotamos por x_1, x_3.

Consideremos el caso $x_1 < x_3$, porque

- el caso $x_1 = x_3$ es trivial,
- el caso $x_1 > x_3$ es similar.

Demostración del teorema, (b)⇒(a)

Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa.

Elegimos dos puntos en X, los denotamos por x_1, x_3.

Consideremos el caso $x_1 < x_3$, porque

- el caso $x_1 = x_3$ es trivial,
- el caso $x_1 > x_3$ es similar.

Sea $\lambda \in [0, 1]$. Los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son triviales, por eso suponemos que $0 < \lambda < 1$.

Definimos x_2 como

$$x_2 :=$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda =$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda =$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Por el lema, de la desigualdad (b) sale (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Definimos x_2 como

$$x_2 := (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Por el lema, de la desigualdad (b) sale (a):

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Luego

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Demostración del teorema, (a)⇒(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Demostración del teorema, (a)⇒(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a)⇒(e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Demostración del teorema, (a)⇒(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a)⇒(e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) =$$

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a)$\Rightarrow$(e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2)$$

Demostración del teorema, (a)⇒(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a)⇒(e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) \geq 0.$$

Demostración del teorema, (a)$\Rightarrow$(e)

Supongamos que f es convexa.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$, diferentes a pares.

Si $x_1 < x_2 < x_3$, por la implicación (a)$\Rightarrow$(e) del lema tenemos

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

Si $x_1 < x_3 < x_2$, entonces usamos la simetría y aplicamos el lema a los puntos x_1, x_3, x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) \geq 0.$$

Los demás casos se consideran de manera similar.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

(a)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(a), (a)$\Rightarrow$(d), (d)$\Rightarrow$(a), (e)$\Rightarrow$(a).

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

(a)$\Rightarrow$(c),   (c)$\Rightarrow$(a),   (a)$\Rightarrow$(d),   (d)$\Rightarrow$(a),   (e)$\Rightarrow$(a).

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:

(a)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(a), (a)$\Rightarrow$(d), (d)$\Rightarrow$(a), (e)$\Rightarrow$(a).

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema similar para las funciones estrictamente convexas.

Ejercicio. Demostrar el resto del teorema:
(a)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(a), (a)$\Rightarrow$(d), (d)$\Rightarrow$(a), (e)$\Rightarrow$(a).

Ejercicio. Demostrar el teorema de manera directa, incluyendo los razonamientos del lema.

Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema similar para las funciones estrictamente convexas.

Ejercicio. Sea $X = [0, +\infty[$ y sea $f(t) := t^3$.
Escribir $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como un polinomio en las variables x_1, x_2, x_3.
Demostrar que f es convexa.