Continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de abril de 2020

Objetivo. Demostrar que si f es integrable en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, y si Y es un conjunto de medida pequeña, entonces la integral $\int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ es pequeña.

Objetivo. Demostrar que si f es integrable en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, y si Y es un conjunto de medida pequeña, entonces la integral $\int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ es pequeña.

Prerrequisitos.

- Si f es positiva y medible, entonces $Y \mapsto \int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ es una medida.
- Continuidad de medida por arriba.
- Desigualdad de Markov–Chebyshov.
- $\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ para f en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

Plan

El caso de funciones acotadas

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Primero trabajaremos con funciones positivas ($f \geq 0$).

El caso de funciones acotadas

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Primero trabajaremos con funciones positivas ($f \geq 0$).

Queremos demostrar que si $\mu(Y)$ es pequeña, entonces la integral $\int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ es pequeña.

Cuando f es acotada, esta afirmación es muy simple.

El caso de funciones acotadas

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.
Primero trabajaremos con funciones positivas ($f \geq 0$).

Queremos demostrar que si $\mu(Y)$ es pequeña, entonces la integral $\int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ es pequeña.
Cuando f es acotada, esta afirmación es muy simple.

Ejercicio. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $M \geq 0$.
Supongamos que $|f(x)| \leq M$ para cada x en X.

1. Para cada Y en $\mathcal{F}$, acotar $\int_Y f \, \mathrm{d}\mu$ en términos de M y $\mu(Y)$.
2. Sea $\varepsilon > 0$. Encontrar un $\delta > 0$ tal que para cada Y en $\mathcal{F}$ con $\mu(Y) < \delta$ se cumple

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Idea

Si $f \geq 0$ y $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, consideremos los conjuntos

$$A_v := \{x \in X : \; f(x) \geq v\}.$$

Vamos a demostrar un lema: cuando v es grande, la integral $\int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu$ es pequeña.

Después de demostrar el lema, dividimos la integral sobre Y en dos partes:

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y \cap A_v} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y \setminus A_v} f \, \mathrm{d}\mu,$$

y mostramos que ambos sumandos son pequeños,
cuando v es grande y $\mu(Y)$ es pequeña.

Repaso: la integral de una función positiva sobre un conjunto variable es una medida

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como

$$\varphi(Y) := \int_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

Repaso: la integral de una función positiva sobre un conjunto variable es una medida

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como

$$\varphi(Y) := \int_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

Para demostrar la propiedad σ-aditiva de φ,
se usa el hecho que $\int \sum = \sum \int$ para funciones positivas
(es un corolario del teorema de convergencia monótona).

Repaso: la continuidad de medida por arriba

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \varphi)$ un espacio de medida y sea $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $\mathcal{F}$.

Repaso: la continuidad de medida por arriba

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \varphi)$ un espacio de medida y sea $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $\mathcal{F}$. Supongamos que $\varphi(A_1) < +\infty$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(A_m) = \varphi\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m\right).$$

Repaso: la desigualdad de Markov–Chebyshov

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $0 < v < +\infty$,

$$A_v := \{x \in X : \; f(x) \geq v\}.$$

Entonces

$$\mu(A_v) \leq$$

Repaso: la desigualdad de Markov–Chebyshov

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $0 < v < +\infty$,

$$A_v := \{x \in X:\ \ f(x) \geq v\}.$$

Entonces

$$\mu(A_v) \leq \frac{1}{v} \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Repaso: la desigualdad de Markov–Chebyshov

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $0 < v < +\infty$,

$$A_v := \{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}.$$

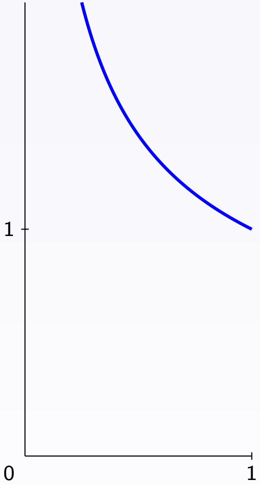
Entonces

$$\mu(A_v) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración:

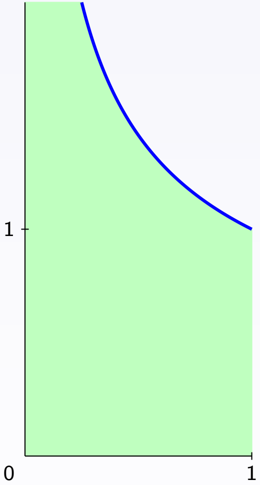
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu \geq v \, \mu(A_v).$$

Ejemplo



$$X = (0,1), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}},$$

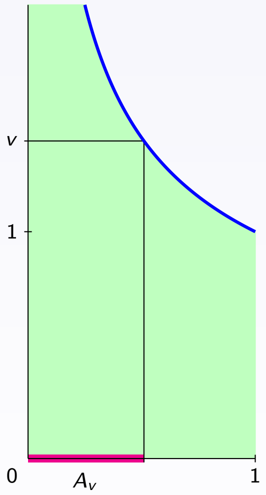
Ejemplo



$$X = (0,1), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2,$$

Ejemplo

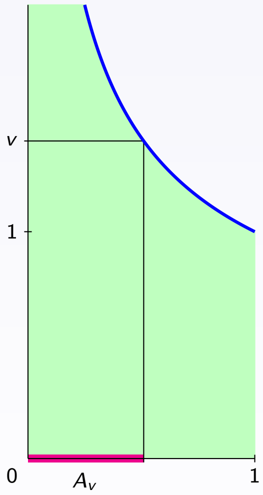


$$X = (0,1), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2,$$

$$A_v = \left\{ x \in (0,1) \colon \ \frac{1}{\sqrt{x}} \geq v \right\} = \left(0, \frac{1}{v^2}\right],$$

Ejemplo



$$X = (0,1), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2,$$

$$A_v = \left\{ x \in (0,1) \colon \ \frac{1}{\sqrt{x}} \geq v \right\} = \left(0, \frac{1}{v^2}\right],$$

$$\int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^{1/v^2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{2}{v}.$$

Ejercicios

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Para cada v en $(0, +\infty]$, pongamos $A_v := \{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}$.

En particular, $A_{+\infty} := \{x \in X \colon \ f(x) = +\infty\}$.

Demostrar las siguientes propiedades.

Ejercicios

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Para cada v en $(0, +\infty]$, pongamos $A_v := \{x \in X \colon \; f(x) \geq v\}$.

En particular, $A_{+\infty} := \{x \in X \colon \; f(x) = +\infty\}$.

Demostrar las siguientes propiedades.

1. Para $0 < v < +\infty$, $\qquad \mu(A_v) \leq \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu.$

Ejercicios

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Para cada v en $(0, +\infty]$, pongamos $A_v := \{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}$.

En particular, $A_{+\infty} := \{x \in X \colon \ f(x) = +\infty\}$.

Demostrar las siguientes propiedades.

1. Para $0 < v < +\infty$, $\displaystyle\mu(A_v) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$
2. La familia $(A_v)_{v \in (0,+\infty]}$ es decreciente.

Ejercicios

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Para cada v en $(0, +\infty]$, pongamos $A_v := \{x \in X\colon \; f(x) \geq v\}$.

En particular, $A_{+\infty} := \{x \in X\colon \; f(x) = +\infty\}$.

Demostrar las siguientes propiedades.

1. Para $0 < v < +\infty$, $\qquad \mu(A_v) \leq \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$.
2. La familia $(A_v)_{v \in (0, +\infty]}$ es decreciente.
3. $\displaystyle\lim_{v \to +\infty} \mu(A_v) = 0$.

Ejercicios

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Para cada v en $(0, +\infty]$, pongamos $A_v := \{x \in X \colon \; f(x) \geq v\}$.

En particular, $A_{+\infty} := \{x \in X \colon \; f(x) = +\infty\}$.

Demostrar las siguientes propiedades.

1. Para $0 < v < +\infty$, $\displaystyle\mu(A_v) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.
2. La familia $(A_v)_{v \in (0, +\infty]}$ es decreciente.
3. $\displaystyle\lim_{v \to +\infty} \mu(A_v) = 0$.
4. $\mu(A_{+\infty}) = 0$.

Lema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$, esto es, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $A_m := \{x \in X \colon \ f(x) \geq m\}$. Entonces

$$\lim_{m \to \infty} \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Lema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$, esto es, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos $A_m := \{x \in X : \; f(x) \geq m\}$. Entonces

$$\lim_{m \to \infty} \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

El sentido intuitivo del lema: si f es integrable, entonces los conjuntos donde f toma valores muy grandes, no influen mucho a la integral.

Demostración del lema.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f \, \mathrm{d}\mu$. Sabemos que φ es una medida.

Demostración del lema.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f \, \mathrm{d}\mu$. Sabemos que φ es una medida.

Definimos $A_{+\infty} := \{x \in X\colon \ f(x) = +\infty\}$.

Demostración del lema.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f \,\mathrm{d}\mu$. Sabemos que φ es una medida.

Definimos $A_{+\infty} := \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}$.

Entonces $\mu(A_{+\infty}) = 0$, luego $\varphi(A_{+\infty}) = \int_{A_{+\infty}} f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Demostración del lema.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f \,\mathrm{d}\mu$. Sabemos que φ es una medida.

Definimos $A_{+\infty} := \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}$.
Entonces $\mu(A_{+\infty}) = 0$, luego $\varphi(A_{+\infty}) = \int_{A_{+\infty}} f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = f^{-1}\left[\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [m,+\infty]\right] = f^{-1}[\{+\infty\}] = A_{+\infty}.$$

La sucesión $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Además, $\varphi(X) < +\infty$.

Demostración del lema.

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f \,\mathrm{d}\mu$. Sabemos que φ es una medida.

Definimos $A_{+\infty} := \{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}$.
Entonces $\mu(A_{+\infty}) = 0$, luego $\varphi(A_{+\infty}) = \int_{A_{+\infty}} f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = f^{-1}\left[\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [m,+\infty]\right] = f^{-1}[\{+\infty\}] = A_{+\infty}.$$

La sucesión $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Además, $\varphi(X) < +\infty$.

Aplicamos la continuidad de φ por arriba: $\lim_{m\to\infty} \varphi(A_m) = \varphi(A_{+\infty}) = 0$. $\square$

Ejercicio. En las condiciones del lema, para cada $v > 0$ definimos

$$A_v := \{x \in X : \ f(x) \geq v\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{v \to +\infty} \int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Ejercicio. En las condiciones del lema, para cada $v > 0$ definimos

$$A_v := \{x \in X : \ f(x) \geq v\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{v \to +\infty} \int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Sugerencia: mostrar que si $v \geq m$, entonces $\quad A_v \subseteq A_m \quad$ y $\quad \displaystyle\int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu.$

Ejercicio. En las condiciones del lema, para cada $v > 0$ definimos

$$A_v := \{x \in X : \ f(x) \geq v\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{v \to +\infty} \int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Sugerencia: mostrar que si $v \geq m$, entonces $A_v \subseteq A_m$ y $\int_{A_v} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu.$

Ejercicio. ¿Cómo se simplifica la demostración del lema, si $f(x) < +\infty$ para cada x?

Teorema (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, el caso de funciones positivas)

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$, esto es, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier Y en $\mathcal{F}$ con $\mu(Y) < \delta$,

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

$\square$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2m}.$$

$\square$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \leq \delta$. Entonces

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \qquad \square$$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \leq \delta$. Entonces

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y \cap A_m} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y \setminus A_m} f \, \mathrm{d}\mu \leq$$

$\square$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \leq \delta$. Entonces

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y \cap A_m} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y \setminus A_m} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu + \int_Y m \, \mathrm{d}\mu < \qquad \square$$

Demostración del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el lema encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Sea $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) \leq \delta$. Entonces

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_{Y \cap A_m} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{Y \setminus A_m} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{A_m} f \, \mathrm{d}\mu + \int_Y m \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + m\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

Corolario (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, el caso de funciones complejas)

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, esto es, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier Y en $\mathcal{F}$ con $\mu(Y) < \delta$, se cumple que

$$\int_Y |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Diferencia de las integrales sobre dos conjuntos "cercanos"

Corolario

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$ con $\mu(A \triangle B) < \delta$, se cumple que

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Diferencia de las integrales sobre dos conjuntos “cercanos”

Corolario

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$ con $\mu(A \triangle B) < \delta$, se cumple que

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

En otras palabras, dotamos $\mathcal{F}$ de la pseudométrica $d(A, B) := \mu(A \triangle B)$ y consideramos la función

$$\xi(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Diferencia de las integrales sobre dos conjuntos “cercanos”

Corolario

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera A, B en $\mathcal{F}$ con $\mu(A \triangle B) < \delta$, se cumple que

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

En otras palabras, dotamos $\mathcal{F}$ de la pseudométrica $d(A, B) := \mu(A \triangle B)$ y consideramos la función

$$\xi(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

El corolario dice que ξ es uniformemente continua.

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$.

$\square$

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$.

Notamos que A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$,

y B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$.

$\square$

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$.
Notamos que A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$,
y B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$. Luego

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| =$$

$\square$

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Notamos que A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$, y B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$. Luego

$$\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \int_B f \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A \setminus B} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu - \int_{B \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu \right|$$

$\square$

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Notamos que A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$, y B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$. Luego

$$\begin{aligned}\left|\int_A f \,\mathrm{d}\mu - \int_B f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{B\setminus A} f \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &= \left|\int_{A\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{B\setminus A} f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|\int_{A\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_{B\setminus A} f \,\mathrm{d}\mu\right|\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

Encontremos δ como en el corolario anterior y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$. Notamos que A es la unión disjunta de $A \cap B$ y $A \setminus B$, y B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$. Luego

$$\begin{aligned}\left|\int_A f\,\mathrm{d}\mu - \int_B f\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_{A\cap B} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\setminus B} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{A\cap B} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{B\setminus A} f\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &= \left|\int_{A\setminus B} f\,\mathrm{d}\mu - \int_{B\setminus A} f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \left|\int_{A\setminus B} f\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_{B\setminus A} f\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\le \int_{A\setminus B} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_{B\setminus A} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_{A\triangle B} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.\end{aligned}$$

□