Funciones absolutamente continuas
(un tema del curso “Análisis real”)

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores, Egor Maximenko.

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

24 de abril de 2020

Objetivos:

- definir el concepto de funciones absolutamente continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$;
- mostrar que las funciones Lipschitz continuas son absolutamente continuas;
- mostrar que las funciones absolutamente continuas son continuas;
- mostrar las funciones absolutamente continuas son de variación acotada;
- mostrar que las integrales indefinidas de funciones Lebesgue integrables son absolutamente continuas.

Prerrequisitos:

- continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración;
- propiedades de la variación total;
- funciones de variación acotada.

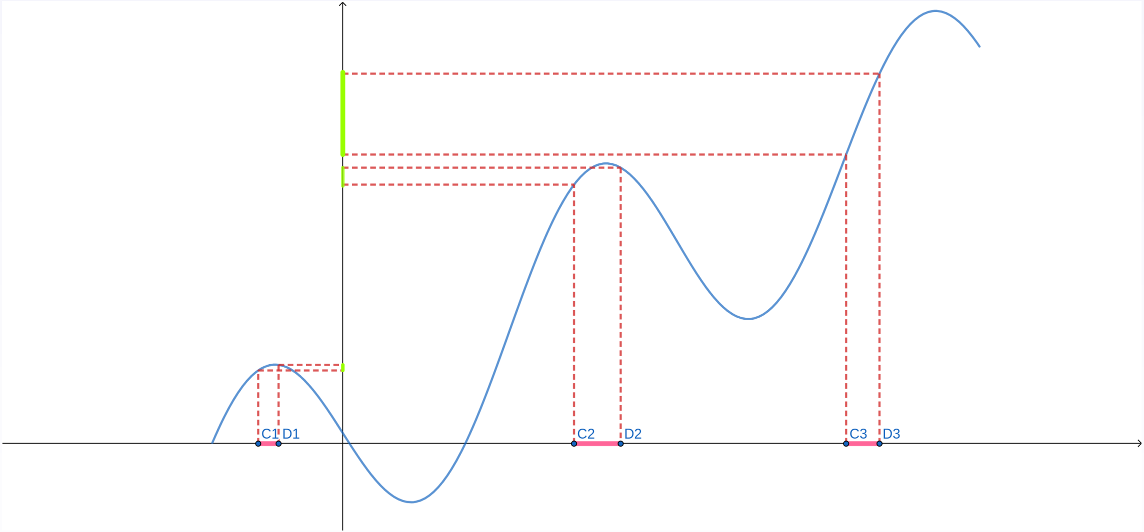
Definición.

Una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ se llama *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ que satisface $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$, se cumple la desigualdad:

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{AC}([a,b])$ al conjunto de todas funciones absolutamente continuas en $[a,b]$.

Ejemplo: $0.5x - 2.2\sin(x) + 0.7\cos(0.2x + 5)$.



Recordatorio (funciones Lipschitz continuas).

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, y $f : X \to Y$. Se dice que la función f es *Lipschitz continua* si existe un coeficiente $L \geq 0$ tal que para cualesquiera a, b en X, se cumple que:

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L d_X(a, b).$$

Proposición (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)

$$\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq \mathrm{AC}([a,b]).$$

Proposición (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)

$$\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq \mathrm{AC}([a,b]).$$

Demostración. Supongamos que $F \in \mathrm{Lip}([a,b])$, $L \geq 0$. Luego,

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |F(x) - F(y)| \leq L|x - y|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \varepsilon/L$.
Si $(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)$ son intervalos disjuntos a pares en $[a,b]$ y $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \delta$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} L(d_j - c_j) < L\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

Proposición

AC$([a, b])$ es un espacio vectorial.

Demostración. Mostremos que se cumplen sólo algunos de los axiomas de espacio vectorial.
Sean $f, g \in$ AC$([a, b])$ y $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
Entonces para $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que para la familia finita de subintervalos disjuntos $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de $[a, b]$, la cual satisface que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se cumple:

$$\sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^n |g(d_j) - g_(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Continuación de la demostración.

Veamos que $f + g \in \mathrm{AC}([a, b])$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(f+g)(d_j) - (f+g)(c_j)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j) + g(d_j) - g(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|f(d_j) - f(c_j)| + |g(d_j) - g(c_j)|\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |f(d_j) - f(c_j)| + \sum_{j=1}^{n} |g(d_j) - g(c_j)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Continuación de la demostración.

Veamos que $cf \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Para $\varepsilon > 0$, hallamos $\delta > 0$ tal que la familia $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ ya dada, satisface que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, y entonces se cumple que,

$$\sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^n |cf(d_j) - cf(c_j)| \leq |c| \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \varepsilon.$$

Continuación de la demostración.

- $0_{[a,b]} \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Continuación de la demostración.

- $0_{[a,b]} \in \mathrm{AC}([a,b])$.
- Si $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, entonces $-f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Ejercicios.

- Sea $f \in \mathrm{AC}([a, b])$. Demostrar que f es uniformemente continua.

  Sugerencia: aplicar la definición de función absolutamente continua con $n = 1$.

Ejercicios.

- Sea $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que f es uniformemente continua.

  Sugerencia: aplicar la definición de función absolutamente continua con $n = 1$.

- Dar un ejemplo de función que no sea absolutamente continua.

Recordatorio (continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración).

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier Y en $\mathcal{F}$, con $\mu(Y) < \delta$, se cumple que:

$$\int_Y |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Integrales indefinidas de funciones Lebesgue integrables son funciones absolutamente continuas.

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Integrales indefinidas de funciones Lebesgue integrables son funciones absolutamente continuas.

Proposición

Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Idea de la demostración: usar la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración.

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a, b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a, b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a, b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)|$$

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j,d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j,d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j,d_j)} f\,\mathrm{d}\mu \right|$$

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j,d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.
Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j,d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j,d_j)} f\,\mathrm{d}\mu \right| \le \sum_{j=1}^n \int_{(c_j,d_j)} |f|\,\mathrm{d}\mu$$

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.
Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j,d_j)} f\,\mathrm{d}\mu \right| \le \sum_{j=1}^n \int_{(c_j,d_j)} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu$$

Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Demostración. Demostremos que $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j,d_j)} f\,\mathrm{d}\mu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{(c_j,d_j)} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon. \qquad \square$$

Recordatorio (variación de una función).

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para toda partición $\tau \in \mathcal{P}[a, b]$, sea:

$$S_{\text{abs}}(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

La *variación total de f* en $[a, b]$ se define como:

$$\operatorname{Var}_a^b f := \sup_{\tau \in \mathcal{P}[a,b]} S_{\text{abs}}(f, \tau).$$

Cada función absolutamente continua tiene variación acotada.

Teorema

$$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b]).$$

Inicio de la demostración. Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Para $\varepsilon = 1$ encontremos $\delta > 0$ como en la definición.

Pongamos

$$K := 1 + \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor.$$

Entonces $0 < \frac{b-a}{K} < \delta$.

Continuación de la demostración.

Sea τ una partición de $[a, b]$. Denotemos por τ' a la partición que se obtiene de τ al agregar (cuando no pertenecen a τ) los puntos

$$a + j\,\frac{b-a}{K} \qquad (j = 1, \ldots, K-1).$$

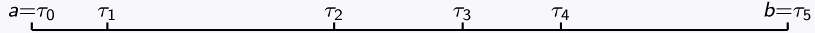
Numeramos los elementos de τ' con subíndices dobles de tal manera que

$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

Continuación de la demostración.

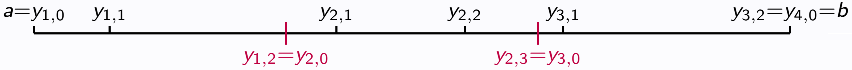
Pongamos $K = 3$.

Partición original τ:



Malla uniforme en $[a, b]$:

Partición nueva τ':



Continuación de la demostración.

$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

Entonces en cada grupo la suma de las longitudes de los intervalos es $\frac{b-a}{K} < \delta$, y por la elección de δ obtenemos:

$$\sum_{s=1}^{m_j} |F(y_{j,s}) - F(y_{j,s-1})| \leq 1.$$

Luego

$$S_{\text{abs}}(F,\tau) \leq S_{\text{abs}}(F,\tau') = \sum_{j=1}^{K} \left(\sum_{s=1}^{m_j} |F(y_{j,s}) - F(y_{j,s-1})| \right) \leq K.$$

Pasando al supremo sobre τ obtenemos que $\text{Var}_a^b(F) \leq K$.

Corolarios y ejercicios.

Corolario

Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces F es derivable c.t.p., y la función F' es integrable.

Demostración. Por el teorema, tenemos que $F \in \mathrm{BV}([a.b])$ y por el corolario del criterio de una función de variación acotada, F' es derivable μ ctp.

Por otra parte, como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$,

$$\int_a^b |F'(t)|\,\mathrm{d}t \leq Var_a^b(F) < +\infty.$$

Es decir, $F' \in L^1(X,\mu)$.

$\therefore F'$ es integrable. $\square$

Corolarios y ejercicios.

Ejercicio.

Sea $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Demostrar que F es acotada en $[a, b]$.

Corolarios y ejercicios.

Corolario

Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$. Entonces $FG \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Demostración. Como $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$, entonces existen $M, N > 0$ tales que $|F(x)| \leq M$ y $|G(x)| \leq N$, para todo $x \in [a,b]$. Para $\varepsilon > 0$, hallamos $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para la colección disjunta $((c_j, d_j))_{j=1}^{n}$ de subintervalos de $[a,b]$, la cual satisface $\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces se cumple:

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2N} \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^{n} |G(d_j) - G(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Corolarios y ejercicios.

Entonces, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |FG(d_j) - FG(c_j)| &= \sum_{j=1}^{n} |F(d_j)G(d_j) - F(c_j)G(c_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|F(d_j)G(d_j) - F(d_j)G(c_j)| + |F(d_j)G(c_j) - F(c_j)G(c_j)|\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |F(d_j)||G(d_j) - G(c_j)| + \sum_{j=1}^{n} |G(c_j)||F(d_j) - F(c_j)| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + N\frac{\varepsilon}{2N} \\
&= \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$