Identidades de polarización para las formas sesquilineales

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo. Dada una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, le asociamos la forma cuadrática $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x).$$

Ya hemos estudiado algunas propiedades elementales de q_f.

Objetivos. Mostrar que f se expresa en términos de q_f. Como una consecuencia, podremos concluir que la correspondencia $f \mapsto q_f$ es inyectiva.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales), la forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal, raíces complejas de la unidad, la suma de la progresión geométrica.

Sumas de las raíces complejas de uno

1 Lema. *Sea $p \in \{0,1,2,3\}$. Entonces*

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Primera demostración. El cálculo directo para cada p. $\square$

Segunda demostración. Aplicar la fórmula de la suma de la progresión geométrica. $\square$

Dado m en $\mathbb{N}$, usemos la siguiente notación:

$$\varepsilon_m \coloneqq \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{m}\right).$$

2 Ejercicio (las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, y sea $r \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\varepsilon_m^r = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \in m\mathbb{Z}.$$

La condición $r \in m\mathbb{Z}$ significa que m divide a r.

3 Ejercicio (las sumas de las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} m, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, \ldots, m-1\}. \end{cases}$$

Identidades de polarización para formas sesquilineales

Hay varias identidades que expresan f en términos de q. La más conocida y probablemente la más cómoda es la siguiente fórmula con 4 sumandos.

4 Proposición (la identidad de polarización para las formas sesquilineales)**.** *Sea* $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal. Sean* $a, b \in V$. *Entonces*

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_f(a + \mathrm{i}^k \, b). \tag{1}$$

Demostración. Para cada k en $\{0, 1, 2, 3\}$ tenemos

$$q_f(a + \mathrm{i}^k \, b) = f(a + \mathrm{i}^k \, b, a + \mathrm{i}^k \, b) = q_f(a) - \mathrm{i}^k \, f(a,b) + \mathrm{i}^k \, f(b,a) + q_f(b).$$

Multiplicamos por i^k:

$$\mathrm{i}^k \, q_f(a + \mathrm{i}^k \, b) = \mathrm{i}^k \, q_f(a) + f(a,b) + \mathrm{i}^{2k} \, f(b,a) + \mathrm{i}^k \, q_f(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualded sobre k en $\{0, 1, 2, 3\}$. Aplicando el Lema 1 obtenemos (1). □

5 Proposición (la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva)**.** *Sean* $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ *y* $g\colon V^2 \to \mathbb{C}$ *formas sesquilineales tales que* $q_f = q_g$, *esto es,*

$$\forall x \in V \qquad f(x,x) = g(x,x).$$

Entonces $f = g$, *esto es,*

$$\forall x, y \in V \qquad f(x,y) = g(x,y).$$

Demostración. Se sigue de la identidad (1). □

6 Ejercicio (la identidad de polarización con m sumandos)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadrática asociada a f:

$$q(x) \coloneqq f(x,x).$$

Sean $a,b \in V$. Demostrar que

$$f(a,b) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k\, q(a+\varepsilon_m^k b).$$

Criterio de formas sesqulineales hermíticas

Una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama *hermítica*, si $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$ para cualesquiera a,b en V.

7 Proposición. *Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes.*

(a) $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$ para cualesquiera a,b en V;

(b) $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que f es hermítica. Entonces para cada u en V obtenemos

$$q_f(u) = f(u,u) = \overline{f(u,u)} = \overline{q_f(u)},$$

así que $q_f(u) \in \mathbb{R}$.

(b)⇒(a). Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V. Sean $a,b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización (1):

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\left(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\right).$$

Factorizamos i de la expresión $b+\mathrm{i}\, a$, -1 de la expresión $b-a$, $-\mathrm{i}$ de la expresión $b-\mathrm{i}\, a$:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}(a-\mathrm{i}\, b)\big) - q_f\big(-(a-b)\big) - \mathrm{i}\, q_f\big(-\mathrm{i}(a+\mathrm{i}\, b)\big)\Big).$$

Recordemos que q_f tiene la propiedad absolutamente homogénea de orden 2:

$$q_f(\lambda v) = |\lambda|^2 q(v).$$

Aplicamos esta propiedad, tomando en cuenta que $|\,\mathrm{i}\,| = |-1| = |-\mathrm{i}\,| = 1$:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)\big).$$

Por otro lado, aplicamos la identidad de polarización a la expresión $f(a,b)$ y sacamos el conjugado usando la suposición que todos los valores de q son reales:

$$\overline{f(a,b)} = \frac{1}{4}\big(q_f(a+b) - \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b)\big).$$

Hemos mostrado que $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$. $\square$