Funciones periódicas
(un tema auxiliar para estudiar series de Fourier)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de enero de 2021

Funciones 2π-periódicas

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama 2π-periódica, si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Funciones 2π-periódicas

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama 2π-periódica, si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función 2π-periódica. Demostrar que

$$\forall m \in \mathbb{Z} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2k\pi) = f(x).$$

Funciones continuas 2π-periódicas

Denotamos por $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas 2π-periódicas:

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \coloneqq \{f \in C(\mathbb{R}): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Funciones continuas 2π-periódicas

Denotamos por $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas 2π-periódicas:

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado de $C_b(\mathbb{R})$.

Funciones continuas 2π-periódicas

Denotamos por $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas 2π-periódicas:

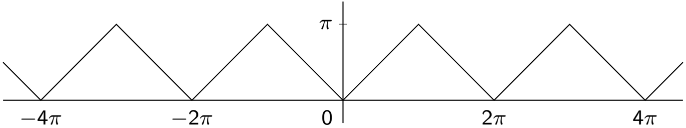
$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado de $C_b(\mathbb{R})$.

Ejercicio. Demostrar que $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es una subálgebra de $C_b(\mathbb{R})$.

Ejemplos de funciones continuas 2π-periódicas

- $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$,
- cos,
- sen,
- $x \mapsto \pi - \left| x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor - \pi \right|$.



Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $\quad f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi)) = f([0, 2\pi])$.

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $\quad f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi)) = f([0, 2\pi])$.

Idea de demostración. Dado x en $\mathbb{R}$, pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad u := x - 2k\pi.$$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $\quad f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi)) = f([0, 2\pi])$.

Idea de demostración. Dado x en $\mathbb{R}$, pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad u := x - 2k\pi.$$

Entonces $\quad u \in [0, 2\pi), \quad x = u + 2k\pi, \quad f(x) = f(u).$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $\quad f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi)) = f([0, 2\pi])$.

Idea de demostración. Dado x en $\mathbb{R}$, pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad u := x - 2k\pi.$$

Entonces $\quad u \in [0, 2\pi), \quad x = u + 2k\pi, \quad f(x) = f(u).$

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces f es acotada.

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $\quad f(\mathbb{R}) = f([0,2\pi)) = f([0,2\pi])$.

Idea de demostración. Dado x en $\mathbb{R}$, pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad u := x - 2k\pi.$$

Entonces $\quad u \in [0,2\pi), \quad x = u + 2k\pi, \quad f(x) = f(u)$.

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces f es acotada.

Idea: usar la proposición anterior y el hecho que f es acotada en el compacto $[0,2\pi]$.

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces f es uniformemente acotada.

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces f es uniformemente acotada.

Idea de demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $[0, 2\pi]$ es un compacto, f es uniformemente continua en $[0, 2\pi]$. Encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall u, v \in [0, 2\pi] \qquad |u - v| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 < y - x < \delta$. Pongamos

$$j := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad u := x - 2j\pi, \qquad k := \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor, \qquad v := y - 2k\pi.$$

Considerar dos casos: $j = k$ y $k = j + 1$. Si $k = j + 1$,

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(2k\pi)| + |f(2k\pi) - f(x)| \leq ?.$$

Funciones 2π-periódicas p-integrables

Sea $1 \le p < +\infty$. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función 2π-periódica Lebesgue medible. Definimos

$$N_{p,2\pi\text{-per}}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} |f|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Sean

$$\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \colon \quad f \text{ es } 2\pi\text{-periódica}, \quad N_{p,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty\},$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \colon \quad f \text{ es } 2\pi\text{-periódica}, \quad f = 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

Definimos $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ como el espacio cociente $\mathcal{L}^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})/\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Sobre las integrales de una función periódica

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sobre las integrales de una función periódica

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración.

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sobre las integrales de una función periódica

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración.

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Sobre las integrales de una función periódica

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Como f es 2π-periódica, $f(y + 2\pi) = f(y)$.

Sobre las integrales de una función periódica

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable $y = x - 2\pi$.

Como f es 2π-periódica, $f(y+2\pi) = f(y)$. Luego

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Otras maneras de tratar el dominio

En el estudio de las funciones 2π-periódicas, hay varias maneras de tratar el dominio.

- $\mathbb{R}$;
- $[0, 2\pi)$; otras opciones similares son $[-\pi, \pi)$ y $(-\pi, \pi]$;
- el grupo cociente $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$;
- la circunferencia unitaria $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon |t| = 1\}$.

Otras maneras de tratar el dominio

En el estudio de las funciones 2π-periódicas, hay varias maneras de tratar el dominio.

- $\mathbb{R}$;
- $[0, 2\pi)$; otras opciones similares son $[-\pi, \pi)$ y $(-\pi, \pi]$;
- el grupo cociente $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$;
- la circunferencia unitaria $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon |t| = 1\}$.

La siguiente función es un epimorfismo de grupos $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$:

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

Otras maneras de tratar el dominio

En el estudio de las funciones 2π-periódicas, hay varias maneras de tratar el dominio.

- $\mathbb{R}$;
- $[0, 2\pi)$; otras opciones similares son $[-\pi, \pi)$ y $(-\pi, \pi]$;
- el grupo cociente $\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$;
- la circunferencia unitaria $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$.

La siguiente función es un epimorfismo de grupos $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$:

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,.$$

Como el núcleo de este epimorfismo es $2\pi\mathbb{Z}$, tenemos un isomorfismo entre $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$.

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array}} \\
\boxed{f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{h \in C(\mathbb{R}_{2\pi})} \\
 & \boxed{w \in C(\mathbb{T})}
\end{tikzcd}
$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x \to 2\pi - 0} g(x) = g(0) \end{array} \\
f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \arrow[ur, leftrightarrow, "g := f|_{[0,2\pi)}"] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & h \in C(\mathbb{R}_{2\pi}) \\
 & w \in C(\mathbb{T})
\end{tikzcd}$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & \boxed{\begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array}} \\
\boxed{f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} \arrow[ur, <->, "g := f|_{[0,2\pi)}", "f(x) := g(x - 2\pi\lfloor x/(2\pi)\rfloor)"'] \arrow[r, <->] \arrow[dr, <->] & \boxed{h \in C(\mathbb{R}_{2\pi})} \\
 & \boxed{w \in C(\mathbb{T})}
\end{tikzcd}
$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array} \\
f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \arrow[ur, leftrightarrow, "g := f|_{[0,2\pi)}", "f(x) := g(x - 2\pi\lfloor x/(2\pi)\rfloor)"'] \arrow[r, leftrightarrow, "h(x+2\pi\mathbb{Z}) := f(x)"] \arrow[dr, leftrightarrow] & h \in C(\mathbb{R}_{2\pi}) \\
 & w \in C(\mathbb{T})
\end{tikzcd}
$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array}} \arrow[dl, shift left, "f(x) := g(x - 2\pi\lfloor x/(2\pi)\rfloor)"] \\
\boxed{f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} \arrow[ur, shift left, "g := f|_{[0,2\pi)}"] \arrow[r, shift left, "h(x+2\pi\mathbb{Z}) := f(x)"] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{h \in C(\mathbb{R}_{2\pi})} \arrow[l, shift left, "f(x) := h(x+2\pi\mathbb{Z})"] \\
 & \boxed{w \in C(\mathbb{T})}
\end{tikzcd}
$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array} \\
f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \arrow[ur, leftrightarrow, "g := f|_{[0,2\pi)}", "f(x) := g(x - 2\pi\lfloor x/(2\pi)\rfloor)"'] \arrow[r, leftrightarrow, "h(x+2\pi\mathbb{Z}) := f(x)", "f(x) := h(x+2\pi\mathbb{Z})"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) := f(x)"] & h \in C(\mathbb{R}_{2\pi}) \\
 & w \in C(\mathbb{T})
\end{tikzcd}
$$

Otras formas de tratar funciones continuas 2π-periódicas

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & \boxed{\begin{array}{c} g \in C([0,2\pi)), \\ \lim\limits_{x\to 2\pi-0} g(x) = g(0) \end{array}} \\
\boxed{f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})} \arrow[ur, leftrightarrow, "g := f|_{[0,2\pi)}", "f(x) := g(x - 2\pi\lfloor x/(2\pi)\rfloor)"'] \arrow[r, leftrightarrow, "h(x+2\pi\mathbb{Z}) := f(x)", "f(x) := h(x+2\pi\mathbb{Z})"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) := f(x)", "f(x) := w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})"'] & \boxed{h \in C(\mathbb{R}_{2\pi})} \\
 & \boxed{w \in C(\mathbb{T})}
\end{tikzcd}$$

En este curso trabajamos con los espacios $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, pero es útil conocer otras formas de estos espacios.

En este curso trabajamos con los espacios $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, pero es útil conocer otras formas de estos espacios.

En este curso no vamos a justificar bien las flechas del diagrama anterior, ni las siguientes observaciones sobre las medidas e integrales en $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$.

Medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$ e integrales sobre $\mathbb{R}_{2\pi}$

El espacio $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede dotar de la siguiente medida:

$$\nu(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\big(\{x \in [0, 2\pi)\colon\ x + 2\pi\mathbb{Z} \in A\}\big).$$

Medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$ e integrales sobre $\mathbb{R}_{2\pi}$

El espacio $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede dotar de la siguiente medida:

$$\nu(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\big(\{x \in [0, 2\pi) \colon\ x + 2\pi\mathbb{Z} \in A\}\big).$$

Las integrales respecto esta medida se calculan así:

$$\int_{\mathbb{R}_{2\pi}} h \,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} h(x + 2\pi\mathbb{Z}) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Medida en $\mathbb{T}$ e integrales sobre $\mathbb{T}$

La circunferencia $\mathbb{T}$ se puede dotar de la siguiente medida ("longitud de arcos normalizada"):

$$\mu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\big(\{x \in [0, 2\pi) : \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in A\}\big).$$

Medida en $\mathbb{T}$ e integrales sobre $\mathbb{T}$

La circunferencia $\mathbb{T}$ se puede dotar de la siguiente medida ("longitud de arcos normalizada"):

$$\mu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\big(\{x \in [0, 2\pi) : \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in A\}\big).$$

Esta medida es invariante bajo rotaciones de la circunferencia.

Medida en $\mathbb{T}$ e integrales sobre $\mathbb{T}$

La circunferencia $\mathbb{T}$ se puede dotar de la siguiente medida ("longitud de arcos normalizada"):

$$\mu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu\big(\{x \in [0, 2\pi) \colon \quad e^{i\,x} \in A\}\big).$$

Esta medida es invariante bajo rotaciones de la circunferencia.

Las integrales respecto esta medida se calculan así:

$$\int_{\mathbb{T}} w \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} w(e^{i\,x})\,\mathrm{d}\mu(x).$$