Convolución periódica

Objetivos. Introducir el concepto de convolución de funciones 2π-periódicas y demostrar las propiedades principales de esta operación.

Requisitos. Funciones Lebesgue integrables, funciones periódicas, teorema de Fubini, cambio de variable.

Funciones 2π-periódicas

1. Definición (función T-periódica). Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función y sea $T \in \mathbb{R}$. Se dice que f es T-periódica (también se dice que T es un período de f) si para cada x en $\mathbb{R}$

$$f(x+T) = f(x).$$

2. Los períodos de una función. Una función puede tener varios períodos. Por ejemplo, si T es un período de f, entonces $2T$ también es un período de f:

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x).$$

Más general, si T es un período de f, entonces cualquier múltiplo positivo de T también es un período de f. Si f es una constante, entonces cualquier número real es su período. Se puede demostrar que el conjunto de los períodos de una función dada es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

3. El período positivo mínimo de una función. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función. Supongamos que el conjunto de los períodos positivos de f tiene un elemento mínimo T. Entonces se dice que T es el *período positivo mínimo* de f. Se puede demostrar que en esta situación cualquier período positivo de f es un múltiplo entero de T. Hay funciones que no tienen período positivo mínimo.

4. El grupo cociente $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. Sea $T > 0$. Los elementos de $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ son conjuntos de la forma $x + T\mathbb{Z}$, con x en $\mathbb{R}$. La suma de dos elementos de $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ se puede definir como la suma de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, es decir, como el conjunto de todas las sumas:

$$A + B \coloneqq \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b\}.$$

Es fácil ver que si $A, B \in \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$, $x \in A$, $y \in B$, entonces

$$A + B = (x+y) + T\mathbb{Z}.$$

La función $x + T\mathbb{Z} \to \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x/T}$ es un isomorfismo del grupo $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ sobre el grupo $\mathbb{T}$.

5. Varios puntos de vista a las funciones 2π-periódicas. En estos apuntes vamos a trabajar con funciones 2π-periódicas. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función 2π-periódica, entonces existe una única función $g\colon (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \to \mathbb{C}$ tal que $g(x + 2\pi\mathbb{Z}) = f(x)$ para cada x en $\mathbb{R}$. También existe una única función $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tal que $h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) = f(x)$ para cada x en $\mathbb{R}$. Más aún, si f es continua, las funciones g y h también son continuas. Esto significa que en vez de trabajar con funciones 2π-periódicas es posible trabajar con funciones definidas en el grupo cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$. En estos apuntes elegimos el punto de vista más elemental y trabajamos con funciones 2π-periódicas definidas en $\mathbb{R}$.

6. Funciones 2π-periódicas integrables sobre intervalos de longitud 2π. Sea $p \in [1, +\infty]$. Denotamos por $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ a las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son Lebesgue-medibles, 2π-periódicas y p-integrables sobre el intervalo $[0, 2\pi)$.

Convolución periódica

7. Definición (la convolución periódica de dos funciones periódicas). Dadas dos funciones $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, denotamos por $f * g$ su *convolución periódica* (también llamada la *convolución cíclica*):

$$(f * g)(\theta) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - \eta) g(\eta)\, d\mu(\eta). \tag{1}$$

La convolución $f * g$ se puede definir también para otras clases de funciones. Solamente se pide que la integral (1) exista en el sentido de Lebesgue para casi todo θ en $\mathbb{R}$.

8. Proposición (la convolución periódica de dos funciones periódicas es una función periódica). Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dos funciones 2π-periódicas Lebesgue-medibles y tales que su convolución $f * g$ está definida casi en todas partes. Entonces $f * g$ también es una función 2π-periódica.

9. Proposición (propiedad asociativa de la convolución periódica).

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

10. Proposición (propiedad conmutativa de la convolución periódica).

$$f * g = g * f.$$