Particiones de conjuntos
(un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de abril de 2021

Objetivos.

- Definir la noción de partición y partición generalizada de un conjunto.
- Describir particiones generalizadas en términos de las funciones indicadoras.
- Considerar dos operaciones con particiones.

Prerrequisitos.

- Operaciones entre conjuntos.
- Relaciones de equivalencia.
- La función indicadora (característica) de un conjunto.

Partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{P}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

Partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{P}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \qquad \Big(A \neq B \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset\Big)$.
3. $\forall A \in \mathcal{P} \qquad A \neq \emptyset$.

Partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que $\mathcal{P}$ es una partición de X, si se cumplen las siguientes condiciones.

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \qquad \left(A \neq B \qquad \implies \qquad A \cap B = \emptyset\right)$.
3. $\forall A \in \mathcal{P} \qquad A \neq \emptyset$.

Si no se pide la última condición, entonces decimos que $\mathcal{P}$ es una partición generalizada.

Lista de conjuntos que forma una partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$.

Decimos que $(A_1, \ldots, A_m)$ es una partición de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} A_j = X$.
2. $\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \quad j \neq k \quad \Longrightarrow \quad A_j \cap A_k = \emptyset$.
3. $\forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad A_j \neq \emptyset$.

Sin pedir la última condición, la lista $(A_1, \ldots, A_m)$ es una partición generalizada de X.

Familia de conjuntos que forma una partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia en 2^X.

Decimos que $(A_k)_{k\in J}$ es una partición de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\bigcup\limits_{j\in J} = X$.
2. $\forall j, k \in J \quad j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad A_j \cap A_k = \emptyset$.
3. $\forall j \in J \qquad A_j \neq \emptyset$.

Sin pedir la última condición, la familia $(A_k)_{k\in J}$ es una partición generalizada de X.

Correspondencia entre particiones y relaciones de equivalencia

Si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia, entonces para cada x en X pongamos

$$[x]_\sim := \{y \in X : \ x \sim y\}.$$

Correspondencia entre particiones y relaciones de equivalencia

Si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia, entonces para cada x en X pongamos

$$[x]_\sim := \{y \in X : \ x \sim y\}.$$

La siguiente proposición es muy conocida.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Entonces

$$\Big\{[x]_\sim : \quad x \in X\Big\}$$

es una partición de X.

Correspondencia entre particiones y relaciones de equivalencia

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una partición de X. Definimos $\sim$ en X mediante la regla

$$x \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists A \in \mathcal{P} \quad x, y \in A.$$

Entonces $\stackrel{\mathcal{P}}{\sim}$ es una relación de equivalencia sobre X.

Correspondencia entre particiones y relaciones de equivalencia

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una partición de X. Definimos $\sim$ en X mediante la regla

$$x \overset{\mathcal{P}}{\sim} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists A \in \mathcal{P} \quad x, y \in A.$$

Entonces $\overset{\mathcal{P}}{\sim}$ es una relación de equivalencia sobre X.

Proposición

En las condiciones de la proposición anterior,

$$\mathcal{P} = \left\{ [x]_{\overset{\mathcal{P}}{\sim}} : \; x \in X \right\} = \mathcal{P}.$$

Correspondencia entre particiones y relaciones de equivalencia

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una partición de X. Definimos $\sim$ en X mediante la regla

$$x \overset{\mathcal{P}}{\sim} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists A \in \mathcal{P} \quad x, y \in A.$$

Entonces $\overset{\mathcal{P}}{\sim}$ es una relación de equivalencia sobre X.

Proposición

En las condiciones de la proposición anterior,

$$\mathcal{P} = \left\{ [x]_{\overset{\mathcal{P}}{\sim}} : \; x \in X \right\} = \mathcal{P}.$$

Ejercicio. Demostrar estas proposiciones.

La función indicadora de un conjunto (repaso)

Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Definimos $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Una notación más precisa sería $\mathbb{1}_{X,A}$, pero por lo común X está claro desde el contexto.

La función indicadora de un conjunto (repaso)

Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Definimos $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Una notación más precisa sería $\mathbb{1}_{X,A}$, pero por lo común X está claro desde el contexto.

Ejercicio. Demostrar que si $A, B \subseteq X$, entonces

$$\mathbb{1}_{A \cap B} =$$

La función indicadora de un conjunto (repaso)

Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Definimos $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Una notación más precisa sería $\mathbb{1}_{X,A}$, pero por lo común X está claro desde el contexto.

Ejercicio. Demostrar que si $A, B \subseteq X$, entonces

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B,$$

La función indicadora de un conjunto (repaso)

Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Definimos $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Una notación más precisa sería $\mathbb{1}_{X,A}$, pero por lo común X está claro desde el contexto.

Ejercicio. Demostrar que si $A, B \subseteq X$, entonces

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} =$$

La función indicadora de un conjunto (repaso)

Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Definimos $\mathbb{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Una notación más precisa sería $\mathbb{1}_{X,A}$, pero por lo común X está claro desde el contexto.

Ejercicio. Demostrar que si $A, B \subseteq X$, entonces

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B.$$

Particiones generalizadas y las funciones indicadoras

Para escribir sumas con índices naturales, tratamos las particiones generalizadas como listas.

Particiones generalizadas y las funciones indicadoras

Para escribir sumas con índices naturales, tratamos las particiones generalizadas como listas.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $A_1, \ldots, A_m$ una partición generalizada de X. Entonces

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

$$\exists!\ j \in \{1, \ldots, m\} \qquad x \in A_j.$$

Elegimos este j. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) =$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

$$\exists!\ j \in \{1, \ldots, m\} \qquad x \in A_j.$$

Elegimos este j. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \delta_{j,k},$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

$$\exists!\ j \in \{1, \ldots, m\} \qquad x \in A_j.$$

Elegimos este j. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \delta_{j,k},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}(x) =$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

$$\exists!\; j \in \{1, \ldots, m\} \qquad x \in A_j.$$

Elegimos este j. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \delta_{j,k},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{m} \delta_{j,k} =$$

Demostración

Queremos demostrar que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $x \in X$. Como $A_1, \ldots, A_m$ es una partición,

$$\exists!\ j \in \{1, \ldots, m\} \qquad x \in A_j.$$

Elegimos este j. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_k}(x) = \delta_{j,k},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{m} \delta_{j,k} = 1.$$

Particiones generalizadas y las funciones indicadoras

Proposición

Sea X un conjunto y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$ tales que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Entonces $A_1, \ldots, A_m$ es una partición generalizada de X.

Particiones generalizadas y las funciones indicadoras

Proposición

Sea X un conjunto y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$ tales que

$$\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}.$$

Entonces $A_1, \ldots, A_m$ es una partición generalizada de X.

Demostración: ejercicio.

Criterio de partición generalizada en términos de las funciones indicadoras

Las dos proposiciones anteriores se pueden juntar en el siguiente criterio.

Criterio de partición generalizada en términos de las funciones indicadoras

Las dos proposiciones anteriores se pueden juntar en el siguiente criterio.

Proposición

Sea X un conjunto y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- *$A_1, \ldots, A_m$ es una partición generalizada de X.*
- $\mathbb{1}_X = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{A_k}$.

Proposición sobre las intersecciones de las partes de dos particiones

Proposición

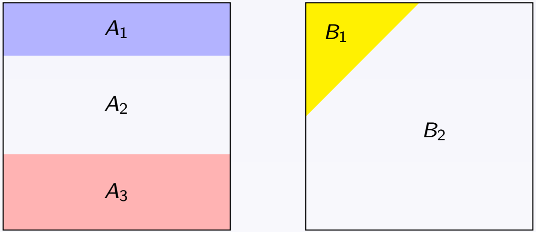
Sea X *un conjunto, sea* $A_1, \ldots, A_m$ *una partición generalizada de* X *y sea* $B_1, \ldots, B_n$ *una partición generalizada de* X*.*
Pongamos

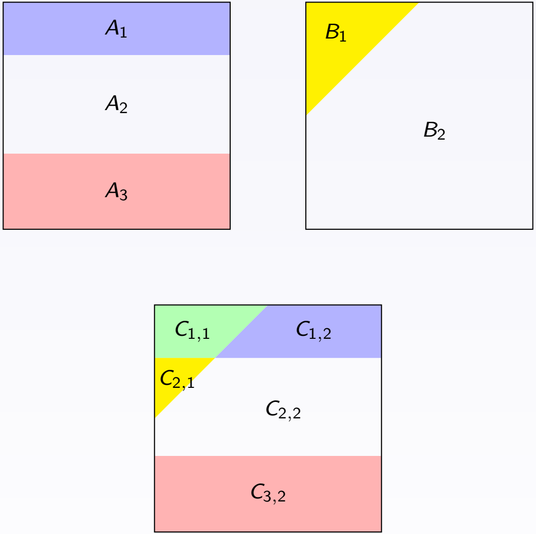
$$L := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\},$$

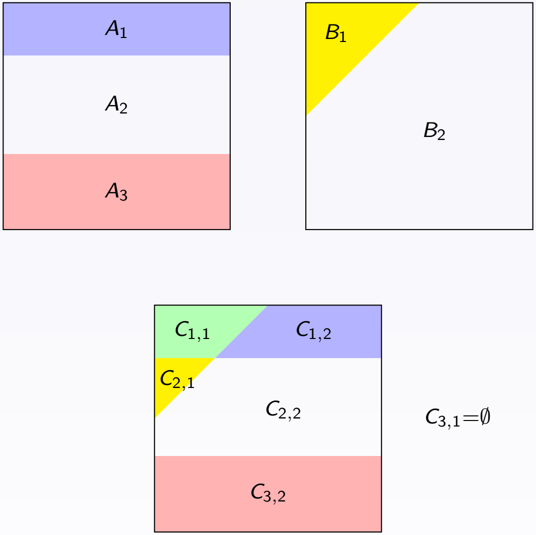
y para cada (j, k) *en* L *definimos*

$$C_{j,k} := A_j \cap B_k.$$

Entonces $(C_{j,k})_{(j,k)\in L}$ *es una partición generalizada de* X*.*


A_1
A_2
A_3
B_1
B_2


A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
$C_{1,1}$
$C_{1,2}$
$C_{2,1}$
$C_{2,2}$
$C_{3,2}$


A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
$C_{1,1}$
$C_{1,2}$
$C_{2,1}$
$C_{2,2}$
$C_{3,2}$
$C_{3,1}=\emptyset$

Demostración

Demostremos que

$$X = \bigcup_{(j,k)\in L} C_{j,k},$$

Sea $x \in X$.

Demostración

Demostremos que

$$X = \bigcup_{(j,k)\in L} C_{j,k},$$

Sea $x \in X$.

Como $X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, encontramos p en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in A_p$.

Demostración

Demostremos que

$$X = \bigcup_{(j,k)\in L} C_{j,k},$$

Sea $x \in X$.

Como $X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, encontramos p en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in A_p$.

Como $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, encontramos q en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_q$.

Luego $x \in$

Demostración

Demostremos que

$$X = \bigcup_{(j,k)\in L} C_{j,k},$$

Sea $x \in X$.

Como $X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, encontramos p en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in A_p$.

Como $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, encontramos q en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_q$.

Luego $x \in A_p \cap B_q = C_{p,q}$.

Demostración

Sean $\quad (j,k),(r,s) \in L, \quad (j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

Demostración

Sean $\quad (j,k),(r,s) \in L, \quad (j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

La condición $\quad (j,k) \neq (r,s) \quad$ significa que $\quad (j \neq r) \quad \vee \quad (k \neq s)$.

Demostración

Sean $\quad (j,k),(r,s) \in L, \quad (j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

La condición $\quad (j,k) \neq (r,s) \quad$ significa que $\quad (j \neq r) \quad \vee \quad (k \neq s)$.

Caso I: $\quad j \neq r$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) =$$

Demostración

Sean $(j,k),(r,s) \in L$, $(j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

La condición $(j,k) \neq (r,s)$ significa que $(j \neq r) \quad \vee \quad (k \neq s)$.

Caso I: $j \neq r$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) = \underbrace{(A_j \cap A_r)}_{\emptyset} \cap (B_k \cap B_s) = \emptyset.$$

Demostración

Sean $\quad (j,k),(r,s) \in L, \quad (j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

La condición $\quad (j,k) \neq (r,s) \quad$ significa que $\quad (j \neq r) \quad \vee \quad (k \neq s)$.

Caso I: $\quad j \neq r$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) = \underbrace{(A_j \cap A_r)}_{\emptyset} \cap (B_k \cap B_s) = \emptyset.$$

Caso II: $\quad r \neq s$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) =$$

Demostración

Sean $\quad (j,k),(r,s) \in L, \quad (j,k) \neq (r,s)$. Demostremos que $C_{j,k} \cap C_{r,s} = \emptyset$.

La condición $\quad (j,k) \neq (r,s) \quad$ significa que $\quad (j \neq r) \quad \vee \quad (k \neq s)$.

Caso I: $\quad j \neq r$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) = \underbrace{(A_j \cap A_r)}_{\emptyset} \cap (B_k \cap B_s) = \emptyset.$$

Caso II: $\quad r \neq s$. Entonces

$$C_{j,k} \cap C_{r,s} = (A_j \cap B_k) \cap (A_r \cap B_s) = (A_j \cap A_r) \cap \underbrace{(B_k \cap B_s)}_{\emptyset} = \emptyset.$$

Otra demostración

Usamos el criterio de partición generalizada en términos de las funciones indicadoras.

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_X =$$

Otra demostración

Usamos el criterio de partición generalizada en términos de las funciones indicadoras.

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k} \right) =$$

Otra demostración

Usamos el criterio de partición generalizada en términos de las funciones indicadoras.

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \mathbb{1}_{B_k} =$$

Otra demostración

Usamos el criterio de partición generalizada
en términos de las funciones indicadoras.

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} =$$

Otra demostración

Usamos el criterio de partición generalizada
en términos de las funciones indicadoras.

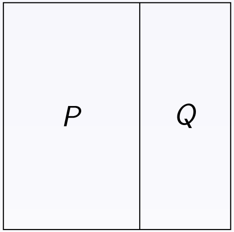
$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \cdot \mathbb{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} = \sum_{(j,k)\in L} \mathbb{1}_{C_{j,k}}.$$

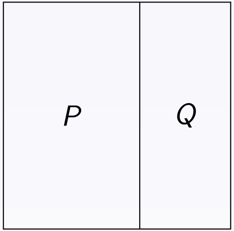
Proposición

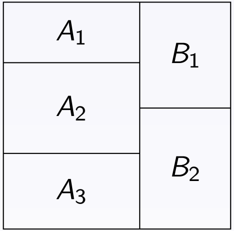
Sean X un conjunto, (P, Q) una partición generalizada de X,
$(A_1, \dots, A_m)$ una partición generalizada de P,
$(B_1, \dots, B_n)$ una partición generalizada de Q.
Definimos

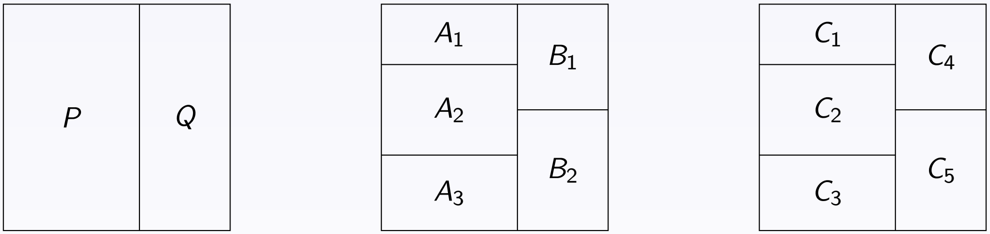
$$C_j := \begin{cases} A_j, & j \in \{1, \dots, m\}, \\ B_{j-m}, & j \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases}$$

Entonces $(C_1, \dots, C_{m+n})$ es una partición generalizada de X.


P
Q


P
Q


A_1
A_2
A_3
B_1
B_2


P
Q
A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
C_1
C_2
C_3
C_4
C_5

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ cubre X.

$$X =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ cubre X.

$$X = P \cup Q =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ cubre X.

$$X = P \cup Q = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ cubre X.

$$X = P \cup Q = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{m+n} C_j\right) =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ cubre X.

$$X = P \cup Q = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) = \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{m+n} C_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m+n} C_j.$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$C_r \cap C_s =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$C_r \cap C_s = B_{r-m} \cap B_{s-m}$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$C_r \cap C_s = B_{r-m} \cap B_{s-m} \xlongequal{r-m \neq s-m} \emptyset.$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$C_r \cap C_s = B_{r-m} \cap B_{s-m} \overset{r-m \neq s-m}{=\!=\!=\!=} \emptyset.$$

Caso III. $r \in \{1, \ldots, m\}$, $s \in \{m+1, \ldots, m+n\}$.

$$C_r \cap C_s =$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \dots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \dots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \dots, n\}$.

$$C_r \cap C_s = B_{r-m} \cap B_{s-m} \overset{r-m \neq s-m}{=\!=\!=\!=\!=} \emptyset.$$

Caso III. $r \in \{1, \dots, m\}$, $s \in \{m+1, \dots, m+n\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap B_{s-m}$$

Demostración

Verifiquemos que $(C_j)_{j=1}^{m+n}$ es una familia disjunta. Sean $r, s \in \{1, \ldots, m+n\}$, $r \neq s$.

Caso I: $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap A_s = \emptyset.$$

Caso II: $r, s \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$C_r \cap C_s = B_{r-m} \cap B_{s-m} \overset{r-m \neq s-m}{=\!=\!=\!=\!=} \emptyset.$$

Caso III. $r \in \{1, \ldots, m\}$, $s \in \{m+1, \ldots, m+n\}$.

$$C_r \cap C_s = A_r \cap B_{s-m} \subseteq P \cap Q = \emptyset.$$

Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $P_1, \ldots, P_m$ una partición generalizada de X, y para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ sea $(A_{j,k})_{k=1}^{n_j}$ una partición generalizada de P_j. Definimos

$$r := \sum_{j=1}^{m} n_j.$$

Mostrar que para cada s en $\{1, \ldots, r\}$ existe un único par (j, k) tal que

$$j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad k \in \{1, \ldots, n_j\}, \qquad s = \sum_{t=1}^{j-1} n_t + k.$$

Definimos

$$C_s := A_{j,k}.$$

Demostrar que $(C_s)_{s=1}^{r}$ es una partición generalizada de X.