Lema de Urysohn. Particiones de unidad

Objetivos. Definir el espacio de funciones continuas de soporte compacto, demostrar el lema de Urysohn y el teorema sobre la partición de unidad.

Requisitos. Espacios localmente compactos.

1. Definición (soporte de una función). Sea X un espacio topológico y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. El *soporte* de f se define como la cerradura del conjunto de los puntos en los cuales f es distinta de cero:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}}.$$

2. Definición (función de soporte compacto). Sea X un espacio topológico y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f es de soporte compacto si $\operatorname{supp}(f)$ es compacto. El conjunto de todas las funciones continuas en X de soporte compacto denotemos por $C_c(X)$.

3. Proposición (funciones de soporte compacto forman un espacio vectorial). El conjunto $C_c(X)$ con operaciones puntuales de la adición y de multiplicación por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

4. Teorema (imagen de un compacto con respecto a un mapeo continuo es compacto). Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ un mapeo continuo. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es compacto.

5. Corolario. Sea $f \in C_c(X)$. Entonces $\mathcal{R}(f)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

6. Notación. Vamos a escribir $K \prec f$ si K es un subconjunto compacto de X, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in K$.

Vamos a escribir $f \prec U$ si U es un subconjunto abierto de X, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$.

7. Lema de Urysohn. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, sea V un conjunto abierto en X y sea K un conjunto compacto en X tales que $K \subseteq V$. Entonces existe una función $f \in C_c(X)$ tal que

$$K \prec f \prec V.$$

Idea de la demostración. Vamos a contruir una familia de conjuntos abiertos $(V_r)_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Primero elijamos V_0 y V_1 tales que

$$K \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V.$$

Sean $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ y sea $(r_n)_{n=3}^{\infty}$ una numeración del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Construimos V_{r_n} por inducción sobre n.

Para construir V_{r_n}, primero encontramos

$$r_i = \max\{r_k \colon r_k < r_{n+1}\}, \qquad r_j = \min\{r_k \colon r_k > r_{n+1}\},$$

y construimos un abierto V_{r_n} de tal manera que $\overline{V_{r_n}}$ es compacto y que

$$\overline{V_{r_j}} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V_{r_{n+1}}} \subseteq V_{r_i}.$$

Entonces la familia $(V_r)_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ tiene las siguientes propiedades: $K \subseteq V_1$, $\overline{V_0} \subseteq V_1$, todo V_r es abierto y todo $\overline{V_r}$ es compacto, y

$$s > r \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{V_s} \subseteq V_r.$$

Sea

$$f_r(x) = r\chi_{V_r}(x) = \begin{cases} r, & x \in V_r, \\ 0, & x \in X \setminus V_r; \end{cases} \qquad g_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{V_s}, \\ s, & x \in X \setminus \overline{V_s}. \end{cases}$$

Sean

$$f = \sup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_r, \qquad g = \inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} g_s.$$

Entonces f es semicontinua por abajo, g es semicontinua por arriba, $K \prec f$, $f \prec \overline{V_0}$.

Vamos a demostrar que $f = g$.

Primero demostremos que $f_r \le g_s$. Si $f_r(x) > g_s(x)$, entonces $r > s$, $x \in V_r$ y $x \in X \setminus \overline{V_s}$, que es imposible porque $\overline{V_r} \subseteq V_s$. Por lo tanto, $f_r \le g_s$ para todo r, s, y $f \le g$.

Supongamos que $f(x) < g(x)$ para algún x. Entonces existen números racionales r, s tales que $f(x) < r < s < g(x)$. Como $f(x) < r$, $x \notin V_r$; como $g(x) > s$, $x \in \overline{V_s}$. Pero la desigualdad $r < s$ implica que $\overline{V_s} \subseteq V_r$. Contradicción. $\square$

8. Teorema (de la partición de unidad). Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, sean $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos abiertos de X y sea $K \subseteq X$ un compacto tal que

$$K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Entonces existen funciones $h_i \prec V_i$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

El conjunto $\{h_1, \ldots, h_n\}$ se llama *partición de unidad* sobre K subordinada a la cubierta $(V_i)_{i=1}^n$.

Demostración. Para todo $x \in K$ encontramos una vecindad W_x tal que $\overline{W_x}$ es compacto y $\overline{W_x} \subseteq V_i$ para algún i. Utilizando que K es compacto, elijamos $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que

$$K \subseteq W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_m}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea H_i la unión de los $\overline{W_{x_j}}$ tales que $\overline{W_{x_j}} \subseteq V_i$. Por el lema de Urysohn, existen funciones g_i tales que $H_i \prec g_i \prec V_i$. Definamos

$$\begin{aligned}
h_1 &= g_1, \\
h_2 &= (1 - g_1)g_2, \\
h_3 &= (1 - g_1)(1 - g_2)g_3, \\
&\ \ \ldots \\
h_n &= (1 - g_1)(1 - g_2) \cdot \ldots \cdot (1 - g_{n-1})g_n.
\end{aligned}$$

Entonces $h_i \prec V_i$ y

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdot \ldots \cdot (1 - g_n).$$

Si $x \in K$, entonces $g_i(x) = 1$ para algún i, por consecuencia

$$h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) = 1. \qquad \square$$