Sucesiones ortonormales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

16 de diciembre de 2020

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal, si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama ortonormal, si

$$\forall j,k\in\mathbb{N}\qquad \langle a_j, a_k\rangle = \delta_{j,k}.$$

Proposición (desigualdad de Bessel)

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v\in H$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos

$$S_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos

$$S_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces $v = u_m + w_m$ y $u_m \in S$.

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos

$$S_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces $v = u_m + w_m$ y $u_m \in S$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k} = 0.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, inicio

Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos

$$S_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m), \qquad u_m := \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k, \qquad w_m := v - u_m.$$

Entonces $v = u_m + w_m$ y $u_m \in S$. Más aún, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w_m, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \langle a_k, a_j \rangle = \langle v, a_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \delta_{j,k} = 0.$$

Hemos demostrado que $w_m \in \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp} = S^{\perp}$.

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos considerando los siguientes vectores:

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m = v - u_m.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos considerando los siguientes vectores:

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m = v - u_m.$$

Como $u_m \perp w_m$, por la identidad de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos considerando los siguientes vectores:

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m = v - u_m.$$

Como $u_m \perp w_m$, por la identidad de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

En particular,

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Demostración de la desigualdad de Bessel, final

Estamos considerando los siguientes vectores:

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle \, a_k, \qquad w_m = v - u_m.$$

Como $u_m \perp w_m$, por la identidad de Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|u_m\|^2 + \|w_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 + \|w_m\|^2.$$

En particular,

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Pasando al supremo sobre m, obtenemos el resultado.

Proyección ortogonal de un vector a la cerradura del subespacio generado por una sucesión ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Sea

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \; k \in \mathbb{N}\})).$$

Pongamos

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w := v - u.$$

Entonces $u \in S$, $w \perp S$ y $v = u + w$.

Demostración, inicio

Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\langle v, a_k\rangle a_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 \leq \|v\|.$$

Demostración, inicio

Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\langle v, a_k\rangle a_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 \leq \|v\|.$$

Luego la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle v, a_k\rangle a_k$ converge.

$$u := \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, a_k\rangle a_k = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\langle v, a_k\rangle\, a_k}_{b_m}\ .$$

Pongamos $w = v - m$. Por la construcción, $u \in S$ y $v = u + w$.

Demostración, final

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$ y para cada $m \geq p$ tenemos

$$\langle w, a_p \rangle = \langle v - b_m, a_p \rangle + \langle b_m - u, a_p \rangle = \langle b_m - u, a_p \rangle.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$\langle w, a_p \rangle = 0.$$

Luego $w \perp S$.

Criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$.

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k :\ k \in \mathbb{N}\})).$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2 = \|v\|^2$ (la identidad de Parseval).

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).
$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).

$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).

Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\|^2 = \|u\|^2$.

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).
$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).
Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\|^2 = \|u\|^2$.

Supongamos (c) y demostremos (b).

Demostración

Usamos la notación u y w de la proposición anterior.

Supongamos (b) y demostremos (a).
$v = u \in S$.

Supongamos (a) y demostremos (c).
Tenemos $w = v - u \in S$, pero $w \perp S$, así que $w = 0_H$, $v = u$ y $\|v\|^2 = \|u\|^2$.

Supongamos (c) y demostremos (b).
Como $\|v\|^2 = \|u\|^2$, obtenemos $w = 0_H$ y $v = u$.