Una base ortonormal en el espacio L^2 sobre el producto de dos espacios de medida

En este tema, suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ son dos espacios de medidas σ-finitas.

Objetivos. Dadas bases ortonormales en $L^2(X, \mu)$ y $L^2(Y, \nu)$, vamos a construir una base ortonormal en $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Prerrequisitos. Base ortonormal en un espacio de Hilbert, el producto de medidas, teoremas de Tonelli y Fubini.

1 Lema. *Sea $f \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$. Para cada y en Y, definimos $f_y \colon X \to \mathbb{C}$,*

$$f_y(x) := f(x, y) \qquad (x \in X).$$

Definimos $g \colon Y \to [0, +\infty]$,

$$g(y) := \int_X |f(x, y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x), \qquad \textit{esto es,} \qquad g(y) = \|f_y\|^2_{L^2(X,\mu)}.$$

Consideremos el siguiente conjunto A:

$$A := \Big\{ y \in Y : \; g(y) < +\infty \Big\}.$$

Entonces, $\mu(Y \setminus A) = 0$, y para cada y en A, $f_y \in L^2(X, \mu)$.

Demostración. Por el teorema de Tonelli,

$$\int_Y g \, \mathrm{d}\nu = \int_{X \times Y} |f|^2 \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \|f\|^2_{L^2(X \times Y, \mu \times \nu)} < +\infty.$$

Como $\int_Y g \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, la función g toma valores finitos casi en todos puntos, es decir, $\mu(Y \setminus A) = 0$.

Además, por la definición de g, para cada y en A tenemos que $f_y \in L^2(X, \mu)$. $\square$

2 Teorema. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas. Sean $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en $L^2(X, \mu)$ y $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en $L^2(Y, \nu)$. Para cada j, k en $\mathbb{N}$, definimos $w_{j,k} \colon X \times Y \to \mathbb{C}$,*

$$w_{j,k}(x, y) := u_j(x) v_k(y).$$

Entonces, $(w_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$ es una base ortonormal del espacio $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Demostración. 1. En la teoría de productos de medidas se muestra que las funciones construidas de esta manera son $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-medibles. Calculemos sus normas, usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}
\|w_{j,k}\|^2_{L^2(X\times Y,\mu\times\nu)} &= \int_{X\times Y} |w_{j,k}|^2 \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \\
&= \int_X \left(\int_Y |w_{j,k}(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y |u_j(x)|^2 |v_k(y)|^2 \,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X |u_j(x)|^2 \|v_k\|^2_{L^2(Y,\nu)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \|u_j\|^2_{L^2(X,\mu)} \|v_k\|^2_{L^2(Y,\nu)} = 1.
\end{aligned}$$

2. Supongamos que $(j,k),(p,q)\in\mathbb{N}^2$ y $(j,k)\neq(p,q)$. Notamos que el producto $w_{j,k}\overline{w_{p,q}}$ es una función Lebesgue-integrable: $w_{j,k}\overline{w_{p,q}}\in L^1(X\times Y,\mu\times\nu)$. Aplicamos el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\langle w_{j,k}, w_{p,q}\rangle_{L^2(X\times Y,\mu\times\nu)} &= \int_{X\times Y} w_{j,k}\overline{w_{p,q}} \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \\
&= \int_X \left(\int_Y u_j(x)v_k(y)\overline{u_p(x)v_q(y)} \,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X u_j(x)\overline{u_p(x)} \left(\int_Y v_k(y)\overline{v_q(y)} \,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \delta_{j,p}\delta_{k,q} = 0.
\end{aligned}$$

3. Supongamos que $f\in L^2(X\times Y,\mu\times\nu)$. Definimos las funciones f_y, la función g y el conjunto A como en el Lema 1. Como vimos en este lema, para cada y en A, se tiene que $f_y\in L^2(X,\mu)$. Para j en $\mathbb{N}$, definimos $h_j\colon Y\to\mathbb{C}$,

$$h_j(y) \coloneqq \begin{cases} \langle f_y, u_j\rangle_{L^2(X,\mu)}, & y\in A; \\ 0, & y\in Y\setminus A. \end{cases}$$

Por la desigualdad de Schwarz (o por le desigualdad de Hölder),

$$|h_j(y)| \le \|f_y\|_{L^2(X,\mu)}\|u_j\|_{L^2(X,\mu)} = \|f_y\|_{L^2(X,\mu)} = g(y).$$

Luego

$$\int_Y |h_j(y)|^2 \,\mathrm{d}\nu(y) \le \int_Y g \,\mathrm{d}\nu < +\infty.$$

Hemos mostrado que $h_j\in L^2(Y,\nu)$.

4. Expresemos la norma de h_j a través de los productos internos $\langle f, w_{j,k} \rangle$. Por la identidad de Parseval y el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|h_j\|^2_{L^2(Y,\nu)} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \bigl|\langle h_j, v_k\rangle_{L^2(Y,\nu)}\bigr|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_Y h_j(y)\overline{v_k(y)}\,\mathrm{d}\nu(y)\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_A \left(\int_X f(x,y)\,\overline{u_j(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \overline{v_k(y)}\,\mathrm{d}\nu(y)\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_{X\times A} f\,\overline{w_{j,k}}\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_{X\times Y} f\,\overline{w_{j,k}}\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, w_{j,k}\rangle_{L^2(X\times Y,\mu\times\nu)}|^2.
\end{aligned}$$

5. Si $f \perp w_{j,k}$ para cada j y k, entonces, por el resultado del inciso 4, tenemos que para cada j en $\mathbb{N}$,

$$\|h_j\|_{L^2(Y,\nu)} = 0.$$

Luego h_j es cero ν-c.t.p. Sean

$$B_j := \bigl\{ y \in Y:\ \ h_j(y) = 0 \bigr\}, \qquad C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j.$$

Tenemos que $h_j(y) = 0$ para cada y en C y cada j en $\mathbb{N}$. Más aún,

$$\nu(Y \setminus (A\cap C)) \le \nu(Y\setminus A) + \nu(Y\setminus C) \le \nu(Y\setminus A) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(Y\setminus B_j) = 0.$$

Para cada y en $A\cap C$,

$$\|f_y\|^2_{L^2(X,\mu)} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f_y, u_j\rangle_{L^2(X,\mu)}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |h_j(y)|^2 = 0.$$

Luego f_y es cero μ-c.t.p. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(X\times Y,\mu\times\nu)} &= \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_{A\cap C} \left(\int_X |f(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\,\mathrm{d}\nu(y) = 0.
\end{aligned}$$

□