Bases ortonormales en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

16 de diciembre de 2020

Trabajamos en un espacio de Hilbert H.

Objetivos:

- estudiar varias descripciones equivalentes de bases ortonormales (bases de Hilbert),
- demostrar un criterio de existencia de una base ortonormal numerable,
- demostrar que cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prerrequisitos:

- el criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una lista ortonormal de vectores,
- el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt.

Criterio de pertenencia de un vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal, repaso

Proposición

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$.

$$S := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k : \ k \in \mathbb{N}\})).$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \|v\|^2$ (la identidad de Parseval).

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^{\perp} = \{0_H\}$.

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^\perp = \{0_H\}$.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama total, si

$$\{a_k:\ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}.$$

Conjuntos totales y sucesiones totales

Un conjunto $X \subseteq H$ se llama total, si $X^\perp = \{0_H\}$.

Una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama total, si

$$\{a_k:\ \ k \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0_H\}.$$

En otras palabras, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es total, si

$$\forall x \in H \qquad \Bigl(\forall k \in \mathbb{N} \qquad \langle x, a_k\rangle = 0\Bigr) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0_H.$$

Criterio de una base ortonormal (base de Hilbert)

Teorema

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Entonces las sig. condiciones son equivalentes.

(a) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es completa: $\operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{a_k:\ k\in\mathbb{N}\}))=H$.

(b) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal:

$$\forall v\in H \qquad v=\sum_{k=1}^{\infty}\langle v,a_k\rangle a_k.$$

(c) Para cada v en H, se cumple la identidad de Parseval: $\|v\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle v,a_k\rangle|^2.$

(d) La sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es total.

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal (en otras palabras, una base de Hilbert),
- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder.

Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal (en otras palabras, una base de Hilbert),
- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder.

Ejercicio. Demostrar que $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$.

$$e_j = (\delta_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Criterio de existencia de una base ortonormal (numerable)

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Entonces en H existe una base ortonormal $\iff$ H es separable.

Criterio de existencia de una base ortonormal (numerable)

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Entonces en H existe una base ortonormal $\Longleftrightarrow$ H es separable.

Idea de demostración (b)$\Rightarrow$(a).

Criterio de existencia de una base ortonormal (numerable)

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Entonces en H existe una base ortonormal $\iff$ H es separable.

Idea de demostración (b)$\Rightarrow$(a). Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(S) = H$, donde

$$S := \operatorname{lin}(\{x_k :\ k \in \mathbb{N}\}).$$

Criterio de existencia de una base ortonormal (numerable)

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Entonces en H existe una base ortonormal $\Longleftrightarrow$ H es separable.

Idea de demostración (b)$\Rightarrow$(a). Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\operatorname{clos}(S) = H$, donde

$$S := \operatorname{lin}(\{x_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}).$$

Al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, obtenemos una sucesión ortonormal $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\operatorname{lin}(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}) = S.$$

En espacios de Hilbert no separables, aplicando el lema de Zorn,
se puede demostrar la existencia de conjuntos ortonormales maximales.
Estos conjuntos sirven como bases ortonormales no numerables.

En este curso no vamos a trabajar con bases ortonormales no numerables.

Isomorfismo isométrico entre H y $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Definimos

$$\Phi\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \qquad \Phi(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

$$\Psi\colon H \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad \Psi(v) := (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ y Ψ son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Isomorfismo isométrico entre H y $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Definimos

$$\Phi\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \qquad \Phi(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

$$\Psi\colon H \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad \Psi(v) := (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ y Ψ son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Demostración: ejercicio.

Isomorfismo isométrico entre H y $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.

Definimos

$$\Phi\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H, \qquad \Phi(\xi) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k,$$

$$\Psi\colon H \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad \Psi(v) := (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ y Ψ son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Demostración: ejercicio.

Corolario: si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, entonces son isométricamente isomorfos.