Criterio de ortogonalidad en términos de normas

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotamos por $\| \cdot \|$ la norma inducida por el producto interno.

Objetivos. Demostrar que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \|\lambda a + b\|^2 \geq \|b\|^2.$$

Prerrequisitos. Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio unidimensional, la norma inducida por un producto interno, el teorema de Pitágoras,

1 Proposición. *Sean $a, b \in V$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $a \perp b$;

(b) para cada λ en $\mathbb{C}$, $\quad \|\lambda a + b\|^2 \geq \|b\|^2$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que $a \perp b$. Para cada λ en $\mathbb{C}$ tenemos que $\lambda a \perp b$:

$$\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle = 0.$$

Luego, por el teorema de Pitágoras,

$$\|\lambda a + b\|^2 = \|\lambda a\|^2 + \|b\|^2 = |\lambda|^2 \, \|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|b\|^2.$$

(b)⇒(a). Razonamos por contraposición. Supongamos que $\langle b, a \rangle \neq 0$. Esto implica que $a \neq 0_V$. Pongamos

$$\lambda := -\frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2}, \qquad u := -\lambda a, \qquad w := b + \lambda a.$$

Entonces $w \perp \ell(a)$. En particular, $w \perp u$.

$$\|b\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = |\lambda|^2 \, |a\|^2 + \|w\|^2 > \|w\|^2 = \|\lambda a + b\|^2.$$

Hemos mostrado que no se cumple (b). $\square$