Projección ortogonal sobre un subespacio cerrado

1 Ejercicio. Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$. Supongamos que $u \in S$, $w \in S^\perp$, $v = u + w$. Demostrar que u es el elemento de S más cercano a v.

2 Proposición. *Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $v \in H$. Entonces existe un único par de vectores $(u, w) \in S \times S^\perp$ tal que $v = u + w$.*

Demostración. Unicidad. Supongamos que $(u, w), (a, b) \in S \times S^\perp$, $v = u + w = a + b$. Entonces $u - a = b - w \in S \cap S^\perp$, luego $u - a = b - w = 0_H$.

Existencia. Sea u el elemento de S más cercano a v, esto es, $\|u - v\| \le \|u - s\|$ para cada s en S. Pongamos $w = v - u$ y demostremos que $w \perp S$. Razonando por contradicción supongamos que $w \notin S^\perp$. Elegimos $a \in S$ tal que $\langle w, a\rangle \ne 0$. Pongamos $b = \frac{1}{\langle w,a\rangle} a$. Entonces $\langle w, b\rangle = 1$. Consideramos la siguiente familia de vectores:

$$q_\delta := u + \delta b.$$

Mostramos que para ciertos valores de δ el vector q_δ es más cercano a v que el vector u.

$$\|v - q_\delta\|^2 = \|w - \delta b\|^2 = \langle w, w\rangle - 2\delta \operatorname{Re}\langle w, b\rangle + \delta^2 \|b\|^2 = \|w\|^2 - 2\delta + \delta^2 \|b\|^2.$$

Pongamos $\delta = \frac{1}{\|b\|^2}$. Entonces

$$\|v - q_\delta\|^2 = \|w\|^2 - \frac{1}{\|b\|^2} < \|w\|^2 = \|v - u\|^2.$$

Obtenemos una constracción con la elección de u. □

3 Proposición. *Sean H un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado de H. Entonces existe una única función $P\colon H \to H$ tal que para cada v en H*

$$Pv \in S, \qquad (I - P)v \in S^\perp.$$

Más aún, este operador P tiene las siguientes propiedades.

1. *P es lineal.*

2. *$\|Pv\| \le \|v\|$ para cada v en H.*

3. $P^2 = P$.

4. $P(H) = S$, $\ker(P) = S^\perp$.

5. $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ *para cada* $x, y \in H$.

4 Corolario. *Sean* H*,* S*,* P *como en la proposición anterior. Supongamos que* $P \neq 0$*. Entonces* $\|P\| = 1$.

5 Corolario. *Sean* H*,* S*,* P *como en la proposición anterior. Pongamos* $Q = I - P$*. Entonces*

$$Q^2 = Q, \qquad Q(H) = S^\perp, \qquad \ker(Q) = S.$$