El cálculo de la proyección ortogonal en términos de una base no ortogonal

Objetivos. Sea $\mathcal{A} := (a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente de vectores en un espacio H con producto interno, sea S el subespacio vectorial generado por $a_1, \ldots, a_m$ y sea $u \in H$. Expresar $P_S u$ en términos de la matriz de Gram $G(\mathcal{A})$ y los números $\langle u, a_k \rangle$.

Prerrequisitos. El proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, la matriz adjunta, operaciones con matrices, la matriz de Gram.

Teorema y su demostración directa

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo. Recordemos que la matriz de Gram de la lista de vectores $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ se define de la sigiente manera:

$$G(\mathcal{A}) := \Big[\langle a_q, a_p \rangle\Big]_{p,q=1}^{m}.$$

1 Teorema (la proyección ortogonal sobre un subespacio de dimensión finita, en términos de una base no ortogonal del subespacio)**.** *Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista linealmente independiente de vectores en H, sea S el subespacio vectorial generado por $\mathcal{A}$ y sea $u \in H$. Entonces,*

$$P_S u = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j a_j,$$

donde

$$\gamma := G(\mathcal{A})^{-1}\alpha, \qquad \alpha := \big[\langle u, a_k \rangle\big]_{k=1}^{m}.$$

Demostración. Sea

$$w := \sum_{j=1}^{m} \gamma_j a_j.$$

Es obvio que $w \in S$. Para cada k en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle w, a_k \rangle = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \langle a_j, a_k \rangle = \sum_{j=1}^{m} G(\mathcal{A})_{k,j}\gamma_j = (G(\mathcal{A})\gamma)_k = \alpha_k = \langle u, a_k \rangle.$$

Por lo tanto, $\langle u - w, a_k \rangle = 0$ para cada k. Como el espacio S está generado por los vectores $a_1, \ldots, a_k$, concluimos que $u - w \in S^\perp$. El vector w tiene las propiedades $w \in S$ y $u - w \in S^\perp$, por eso $w = P_S u$. $\square$

2 Observación. Para calcular el vector γ, no es obligatorio calcular la matriz inversa de $G(\mathcal{A})$. En la práctica, puede ser más cómodo resolver el sistema de ecuaciones lineales $G(\mathcal{A})\gamma = \alpha$.

Deducción por medio de la ortogonalización de Gram–Schmidt

Vamos a explicar otra demostración del Teorema 1, usando la ortogonalizacion de Gram y Schmidt.

Denotamos por $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ a la lista ortonormal de vectores que se obtiene de $\mathcal{A}$ al aplicar el proceso de Gram–Schmidt.

3 Observación (recordatorio: el proceso de Gram–Schmidt, expresión de los vectores viejos en términos de los nuevos y viceversa)**.** Sabemos que para cada k en $\{1, \ldots, m\}$,

$$b_k = \frac{1}{\|c_k\|} c_k,$$

donde

$$c_k \coloneqq a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, b_j \rangle b_j.$$

Por lo tanto,

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, b_j \rangle + \|c_k\|\, b_k.$$

Definimos $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$R_{j,k} \coloneqq \begin{cases} \langle a_k, b_j \rangle, & j < k; \\ \|c_k\|, & j = k; \\ 0, & j > k. \end{cases}$$

Por la definición, la matriz R es triangular superior e invertible. Notemos que R^{-1} también es triangular superior. Usando las matrices R y R^{-1}, podemos expresar $\mathcal{A}$ en términos de $\mathcal{B}$ y viceversa. En efecto,

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} R_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^{m} R_{j,k} b_j. \tag{1}$$

Notemos que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{k=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} a_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} R_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} R_{j,k} (R^{-1})_{k,p} \right) b_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{j,p} b_j = b_p.$$

Resumiendo,

$$b_p = \sum_{k=1}^{m} (R^{-1})_{k,p} a_k = \sum_{k=1}^{p} (R^{-1})_{k,p} a_k. \tag{2}$$

4 Proposición (la matriz de Gram de los vectores viejos)**.**

$$G(\mathcal{A}) = R^* R.$$

Demostración. Sean $p, q \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos la componente (p, q) de la matriz $G(\mathcal{A})$.

$$\begin{aligned} G(\mathcal{A})_{p,q} &= \langle a_q, a_p \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} R_{j,q} b_j, \sum_{k=1}^{m} R_{k,p} b_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} R_{j,q} \overline{R_{k,p}} \langle b_j, b_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} R_{j,q} \overline{R_{k,p}} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} (R^*)_{p,j} R_{j,q} = (R^* R)_{p,q}. \end{aligned}$$

□

5 Proposición. *Sea $u \in H$. Pongamos*

$$\alpha := \left[\langle u, a_j \rangle \right]_{j=1}^{m}, \qquad \beta := \left[\langle u, b_j \rangle \right]_{j=1}^{m}.$$

Entonces,

$$\alpha = R^* \beta. \tag{3}$$

Como consecuencia,

$$\beta = (R^*)^{-1} \alpha. \tag{4}$$

Demostración. Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\alpha_j = \langle u, a_j \rangle = \left\langle u, \sum_{k=1}^{m} R_{k,j} b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \overline{R_{k,j}} \beta_k = (R^* \beta)_j.$$

□

Segunda demostración del Teorema 1. Sabemos que

$$P_S u = \sum_{p=1}^{m} \beta_p b_p.$$

Aplicamos (4) y (2):

$$\begin{aligned} P_S u &= \sum_{p=1}^{m} ((R^*)^{-1} \alpha)_p \sum_{j=1}^{m} (R^{-1})_{j,p} a_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{m} (R^{-1})_{j,p} ((R^*)^{-1} \alpha)_p \right) a_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (R^{-1} (R^*)^{-1} \alpha)_j a_j = \sum_{j=1}^{m} ((R^* R)^{-1} \alpha)_j a_j = \sum_{j=1}^{m} (G(\mathcal{A})^{-1} \alpha)_j a_j. \end{aligned}$$

□