Operadores acotados por abajo

Objetivos. Estudiar el concepto de operadores acotados por abajo (= transformaciones lineales acotadas por abajo) y un par de sus aplicaciones.

Prerrequisitos. Espacios de Hilbert, operadores lineales acotados invertibles, operadores lineales inyectivos, la imagen de un operador lineal, el adjunto de un operador lineal.

En este tema suponemos que H_1, H_2 son espacios de Hilbert.

1 Definición. Un operador A de clase $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ se llama *acotado por abajo* si existe $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in H_1 \qquad \|Ax\|_{H_2} \geq \gamma \|x\|_{H_1}.$$

2 Proposición. *A es acotado por abajo si, y sólo si,*

$$\inf_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|_{H_1} = 1}} \|Ax\|_{H_2} > 0.$$

Demostración. Ejercicio. □

3 Proposición. *A no es acotado por abajo si, y sólo si, existe una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en H_1 de vectores de norma 1 tal que*

$$\lim_{k \to \infty} \|Au_k\|_{H_2} = 0.$$

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que A no es acotado por abajo. Por la Proposición 2,

$$\inf_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|_{H_1} = 1}} \|Ax\|_{H_2} = 0.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$, el número $1/k$ no es cota inferior del conjunto

$$\big\{ \|Ax\|_{H_2} \colon\ x \in H_1,\ \|x\|_{H_1} = 1 \big\},$$

por eso existe u_k en H_1 tal que $\|u_k\|_{H_1} = 1$ y $\|Ax\|_{H_2} < 1/k$.

$\Leftarrow$. Ejercicio. □

4 Proposición. *Si* $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *y* A *es acotado por abajo, entonces* A *es inyectivo y el subespacio* $\operatorname{im}(A)$ *es cerrado.*

Demostración. 1. Si $x \in H_1$ y $Ax = 0_{H_2}$, entonces

$$\|x\|_{H_1} \le \frac{1}{\gamma}\|Ax\|_{H_2} = 0.$$

2. Sean $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\operatorname{im}(A)$ y $w \in H_2$ tales que $w_k \to v$ cuando $k \to \infty$. Para cada k en $\mathbb{N}$, encontramos u_k en H_1 tal que $Au_k = v_k$. Como $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en H_1 y para cada j, k en $\mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$\|u_j - u_k\|_{H_1} \le \frac{1}{\gamma}\|Au_j - Au_k\|_{H_2},$$

concluimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene un límite p. Como A es continuo, tenemos que $Au_k \to Ap$. Por otro lado, $Au_k = v_k \to w$. Luego $Ap = w$ y $w \in \operatorname{im}(A)$. □

5 Repaso (operadores invertibles)**.**

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(H_1, H_2)) := \Big\{A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)\colon \quad \exists S \in \mathcal{B}(H_2, H_1) \quad SA = I_{H_1} \quad \wedge \quad AS = I_{H_2}\Big\}.$$

En esta definición estamos requiriendo que el operador inverso sea acotado. En realidad, el teorema de Banach–Schauder afirma que esto sucede de manera automática. Si $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(H_1, H_2))$, entonces existe un único operador S en $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ tal que $SA = I_{H_1}$ y $AS = I_{H_2}$. Este operador se denota por A^{-1}.

6 Proposición. *Si* $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(H_1, H_2))$, *entonces* A *es acotado por abajo.*

Demostración. Sea $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(H_1, H_2))$. Para cada x en H_1,

$$\|x\|_{H_1} = \|A^{-1}Ax\|_{H_1} \le \|A^{-1}\|\,\|Ax\|_{H_2}.$$

Luego

$$\|Ax\|_{H_2} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,\|x\|_{H_1}.$$ □

7 Proposición. *Si* $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *tal que* A *es acotado por abajo y* A^* *es acotado por abajo, entonces* $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(H_1, H_2))$.

Demostración. Ya sabemos que $\ker(A) = \{0_{H_1}\}$, $\ker(A^*) = \{0_{H_2}\}$ y el subespacio $\operatorname{im}(A)$ es cerrado. Luego

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{cl}(\operatorname{im}(A)) = \ker(A^*)^\perp = \{0_{H_2}\}^\perp = H_2.$$

Como la función A es inyectiva y sobre, existe una función inversa. La denotamos por A^{-1}. Es fácil ver que A^{-1} es lineal. Demostremos que A^{-1} es acotada. Sea $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in H_1 \qquad \|Ax\|_{H_2} \geq \gamma \|x\|_{H_1}.$$

Para cada x en H_1 tenemos que

$$\|x\|_{H_1} = \|AA^{-1}x\|_{H_1} \geq \gamma \|A^{-1}x\|_{H_2},$$

así que la transformación linael A^{-1} es acotada y $\|A^{-1}\| \leq 1/\gamma$. $\square$