Operadores en espacios de Banach acotados por abajo

Objetivos. Estudiar el concepto de operadores acotados por abajo (que actúan en espacios de Banach) y un par de sus aplicaciones.

Prerrequisitos. Espacios de Banach, operadores lineales acotados invertibles, operadores lineales inyectivos, la imagen de un operador lineal.

En este tema suponemos que V, W son espacios de Banach.

1 Definición. Un operador A de clase $\mathcal{B}(V,W)$ se llama *acotado por abajo* si existe $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Ax\|_W \geq \gamma \|x\|_V.$$

2 Proposición. *A es acotado por abajo si, y sólo si,*

$$\inf_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|_V = 1}} \|Ax\|_W > 0.$$

Demostración. Ejercicio. Se utilizan la definición del ínfimo y la definición de la norma del operador. □

3 Proposición. *A no es acotado por abajo si, y sólo si, existe una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en V de vectores de norma 1 tal que*

$$\lim_{k \to \infty} \|Au_k\|_W = 0.$$

Demostración. Ejercicio. Usando la definición del ínfimo, para cada k en $\mathbb{N}$ encontrar u_k en V tal que $\|u_k\|_V = 1$ y $\|Au_k\|_W < 1/k$. □

4 Proposición. *Si $A \in \mathcal{B}(V,W)$ y A es acotado por abajo, entonces A es inyectivo y el subespacio $\operatorname{im}(A)$ es cerrado.*

Demostración. 1. Si $x \in V$ y $Ax = 0_W$, entonces

$$\|x\|_V \leq \frac{1}{\gamma} \|Ax\|_W = 0.$$

2. Sean $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\operatorname{im}(A)$ y $w \in W$ tales que $v_k \to v$ cuando $k \to \infty$. Para cada k en $\mathbb{N}$, encontramos u_k en V tal que $Au_k = v_k$. Como $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en V y para cada j, k en $\mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$\|u_j - u_k\|_V \le \frac{1}{\gamma}\|Au_j - Au_k\|_W,$$

concluimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene un límite p. Como A es continuo, tenemos que $Au_k \to Ap$. Por otro lado, $Au_k = v_k \to w$. Luego $Ap = w$ y $w \in \operatorname{im}(A)$. $\square$

5 Repaso (operadores invertibles)**.**

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V,W)) \coloneqq \Big\{ A \in \mathcal{B}(V,W) \colon \quad S \in \mathcal{B}(W,V) \quad SA = I_V \quad \wedge \quad AS = I_V \Big\}.$$

En esta definición estamos requiriendo que el operador inverso sea acotado. En realidad, el teorema de Banach–Schauder afirma que esto sucede de manera automática. Si $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V,W))$, entonces existe un único operador S en $\mathcal{B}(W,V)$ tal que $SA = I_V$ y $AS = I_W$. Este operador se denota por A^{-1}.

6 Proposición. *Sea $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V,W))$. Entonces, A es acotado por abajo.*

Demostración. Para cada x en V,

$$\|x\|_V = \|A^{-1}Ax\|_V \le \|A^{-1}\|\,\|Ax\|_{H_2}.$$

Luego

$$\|Ax\|_W \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,\|x\|_V.$$

$\square$