Correspondencia biyectiva
entre los operadores lineales acotados
y las formas hermitianas acotadas

Objetivos. Estudiar la correspondencia entre los operadores acotados y las formas hermitianas acotadas en un espacio de Hilbert.

Definición (forma hermitiana). Una función $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ se llama *forma hermitiana* si es lineal con respecto al segundo argumento y lineal conjugada con respecto al primer argumento.

Observación (producto interno). El producto interno es una forma hermitiana simétrica conjugada y positiva definida.

Norma de una forma hermitiana

Definición (norma de una forma hermitiana). Se $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Entonces la *norma* de f se define mediante la siguiente fórmula:

$$\|f\| := \sup_{\substack{u\in H\setminus\{\mathbf{0}\} \\ w\in H\setminus\{\mathbf{0}\}}} \frac{|f(u,w)|}{\|u\|\,\|w\|}.$$

1. Se $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Demuestre que

$$\|f\| = \sup_{\substack{u\in H:\quad \|u\|=1 \\ w\in H:\quad \|w\|=1}} \frac{|f(u,w)|}{\|u\|\,\|w\|}.$$

2. Se $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Demuestre que

$$\|f\| = \sup_{\substack{u\in H:\quad \|u\|\le 1 \\ w\in H:\quad \|w\|\le 1}} \frac{|f(u,w)|}{\|u\|\,\|w\|}.$$

3. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Demuestre que

$$\|f\| = \operatorname{ínf}\big\{C \in [0,+\infty]\colon \quad \forall u,w\in H \quad |f(u,w)| \le C\|u\|\,\|w\|\big\}.$$

Definición (forma hermitiana acotada). Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Se dice que f es *acotada* si $\|f\| < +\infty$.

Forma hermitiana generada por un operador lineal acotado

4. Sea A un operador lineal acotado. Demuestre que la función $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla es hermitiana:

$$f(u,w) \coloneqq \langle u, Aw\rangle.$$

5. Demuestre que la forma hermitiana f del ejercicio anterior es acotada y

$$\|f\| = \|A\|.$$

6. Sean A y B operadores lineales acotados tales que

$$\forall u, w \in H \qquad \langle u, Aw\rangle = \langle u, Bw\rangle.$$

Demuestre que $A = B$.

Operador lineal acotado asociado a una forma hermitiana

7. Teorema de Riesz de la representación de funcionales lineales en un espacio de Hilbert (repaso). Enuncie el teorema.

8. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana acotada. Demuestre que existe un operador lineal acotado A tal que

$$\forall u, w \in H \qquad f(u,w) = \langle u, Aw\rangle.$$