Todo conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos

Objetivos. Demostrar que todo conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos. Se supone que la topología del plano está inducida por la métrica euclidiana.

Requisitos. Bola en un espacio métrico, producto cartesiano de dos conjuntos, la distancia entre un punto y un conjunto.

Dados $x \in \mathbb{R}^2$ y $A \subseteq \mathbb{R}^2$, denotemos por $d'(x, A)$ la "distancia mínima" del punto x al conjunto A:

$$d'(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Sabemos que si A es cerrado y $x \notin A$, entonces

$$d'(x, A) > 0.$$

Más aún, sabemos que si $x, y \in \mathbb{R}^2$, $Z \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces

$$d'(x, Z) \le d(x, y) + d'(y, Z).$$

1 Observación. El conjunto vacío se puede representar como una unión numerable de rectángulos vacíos, por ejemplo

$$\varnothing = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (7, 6) \times (4, 4).$$

Este caso trivial está excluído de la siguiente proposición.

2 Proposición (los conjuntos abiertos en el plano euclidiano en términos de rectángulos abiertos)**.** *Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $A \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión de rectángulos abiertos $\big((a_k, b_k) \times (c_k, d_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b_k) \times (c_k, d_k).$$

Demostración. El caso $A = \mathbb{R}^2$ es simple:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-k, k) \times (-k, k).$$

Consideramos el caso $A \neq \mathbb{R}^2$. El conjunto $A \cap \mathbb{Q}^2$ es numerable. Elegimos una numeración $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de este conjunto:

$$\{p_k : \ k \in \mathbb{N}\} = A \cap \mathbb{Q}^2.$$

Como $p_k \notin \mathbb{R}^2 \setminus A$ y $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es cerrado, tenemos que $d'(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) > 0$. Denotemos este número por ρ_k:

$$\rho_k \coloneqq d'(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) = \inf_{q \in \mathbb{R}^2 \setminus A} d(p_k, q) > 0.$$

Representamos cada punto p_k como $((p_k)_1, (p_k)_2)$. Construimos los siguientes cuadrados abiertos alrededor de los puntos p_k:

$$R_k \coloneqq \left((p_k)_1 - \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}, (p_k)_1 + \frac{\rho_k}{\sqrt{2}} \right) \times \left((p_k)_2 - \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}, (p_k)_2 + \frac{\rho_k}{\sqrt{2}} \right).$$

Vamos a demostrar que

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k.$$

Es fácil ver (¡ejercicio!) que

$$B\left(p_k, \frac{\rho_k}{2}\right) \subseteq R_k \subseteq B(p_k, \rho_k).$$

Por lo tanto, $R_k \subseteq A$ para cada k en $\mathbb{N}$, y

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k \subseteq A.$$

Falta demostrar la contención inversa. Sea $a \in A$, $a = (a_1, a_2)$, y sea

$$\delta \coloneqq d'(a, \mathbb{R}^2 \setminus A).$$

Como $a \notin \mathbb{R}^2 \setminus A$, y $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es cerrado, tenemos $\delta > 0$. Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ encontramos $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|b_1 - a_1| < \frac{\delta}{4\sqrt{2}}, \qquad |b_2 - a_2| < \frac{\delta}{4\sqrt{2}}.$$

Pongamos $b = (b_1, b_2)$. Entonces

$$d(a, b) < \frac{\delta}{4}$$

y por lo tanto $b \in A$. Como $b \in A \cap \mathbb{Q}^2$, existe un único k en $\mathbb{N}$ tal que $b = p_k$. Notemos que

$$d'(a, \mathbb{R}^2 \setminus A) \leq d(a, p_k) + d'(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A),$$

de donde

$$\rho_k = d'(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) \geq d'(a, \mathbb{R}^2 \setminus A) - d(a, p_k) > \delta - \frac{\delta}{4} > \frac{\delta}{2}.$$

Como $d(a, p_k) < \delta/4$, concluimos que

$$a \in B\left(p_k, \frac{\delta}{4}\right) \subseteq B\left(p_k, \frac{\rho_k}{2}\right) \subseteq R_k. \qquad \square$$