Subconjuntos abiertos conexos de espacios normados son conexos por caminos

Objetivos. Demostrar que en un espacio normado, un conjunto abierto es conexo si, y solo si, es conexo por caminos (arco-conexo).

Prerrequisitos. Espacios topológicos conexos, espacios topológicos conexos por caminos, espacios normados, combinaciones convexas.

Aplicaciones. Estructura de subconjuntos abiertos de los espacios $\mathbb{R}^n$, el índice de una curva alrededor de un punto.

Proposición 1. *Sea V un espacio normado y sea $A \subseteq V$ tal que A es abierto y conexo. Entonces, A es conexo por caminos, es decir, para cada a, b en A existe una función continua $\gamma\colon [0,1] \to V$ tal que $\gamma([0,1]) \subseteq A$, $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.*

Demostración. 1. Fijamos $a \in A$. Pongamos

$$C \coloneqq \Big\{ c \in A\colon \quad \exists \gamma \in C([0,1], V) \quad \gamma([0,1]) \subseteq A, \quad \gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = c \Big\}.$$

Queremos mostrar que $C = A$. Obviamente, $a \in C$.

2. Mostremos que C es abierto. Sea $c \in C$. Encontramos $\delta > 0$ tal que $B(c, \delta) \subseteq A$. Sea $b \in B(c, \delta)$. Notamos que ambos puntos b, c pertenecen a la bola $B(c, \delta)$. Por lo tanto, su envoltura convexa $\operatorname{conv}(\{b, c\})$ está contenida en A. Encontramos $\gamma \in C([0,1], V)$ tal que

$$\gamma([0,1]) \subseteq A, \quad \gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = c.$$

Contruimos $\eta\colon [0,1] \to V$ mediante la siguiente regla:

$$\eta(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ c + (2t-1)(b-c), & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que η es continua en cada punto de $[0,1] \setminus \{1/2\}$. Además,

$$\lim_{\substack{t \to 1/2 \\ t < 1/2}} \eta = \eta(1/2) = \gamma(1) = c, \qquad \lim_{\substack{t \to 1/2 \\ t > 1/2}} \eta(t) = c.$$

Como $\gamma([0,1]) \subseteq A$,

$$\eta([0,1]) = \gamma([0,1]) \cup \operatorname{conv}(\{b, c\}) \subseteq A.$$

Finalmente, $\eta(0) = a$ y $\eta(1) = b$. Hemos mostrado que $b \in C$.

3. Mostremos que $A \setminus C$ es abierto. Sea $b \in A \setminus C$. Encontramos $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subseteq A$. Mostremos que $B(b, \delta) \subseteq A \setminus C$. Razonando por reducción al absurdo, suponemos que existe $c \in B(b, \delta) \cap C$. Notamos que ambos puntos b, c pertenecen a la

bola $B(b, \delta)$, por eso su envoltura convexa $\operatorname{conv}(\{u, c\})$ está contenida en A. Similar al razonamiento en la parte 2, podemos mostrar que $b \in C$.

4. Hemos mostrado que C es abierto, $A \setminus C$ es abierto y $a \in C$. Si suponemos que $A \setminus C \neq \emptyset$, entonces obtenemos que A es disconexo. Como A es conexo, concluimos que $A \setminus C = \emptyset$, es decir, $C = A$. $\square$

Observación 2. En las condiciones de la proposición, es posible construir γ que se afín a trozos.