Normas en $\mathbb{C}^n$ y su equivalencia entre si

(un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

11 de marzo de 2022

1. Introducción
2. Normas en $\mathbb{C}^n$
3. Comparación de normas (repaso)
4. Equivalencia de todas las normas en $\mathbb{C}^n$
5. Espacios normados de dimensión finita

Objetivos

- Recordar la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$.
- Conocer ejemplos de otras normas en $\mathbb{C}^n$.
- Demostrar que todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes entre si.

Prerrequisitos

- Comparación y equivalencia de normas.
- Completez de $\mathbb{C}$.
- Espacios compactos, conjuntos compactos en $\mathbb{C}^n$.
- La imagen de un conjunto compacto bajo una función continua.

Aplicaciones

- Propiedades de subespacios de dimensión finita en espacios normados.
- Propiedades de listas de vectores finitas en espacios normados.
- Propiedades de operadores lineales de rango finito.
- Propiedades de operadores lineales compactos.

Las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$ (repaso)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$ (repaso)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |a_k|.$$

Las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$ (repaso)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |a_k|.$$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$ (repaso)

Para $1 \le p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1 \le k \le n} |a_k|.$$

Proposición

Sea $1 \le p \le +\infty$. Entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Idea de demostración para $1 \le p \le +\infty$: Young, Hölder, Minkowski (de la misma manera como en ℓ^p o en L^p).

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ es de Banach.

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ es de Banach.

Primera demostración: razonar de la misma manera como en ℓ^p.

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Segunda demostración: usar la completez de ℓ^p y un encaje de $\mathbb{C}^n$ en ℓ^p.

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Segunda demostración: usar la completez de ℓ^p y un encaje de $\mathbb{C}^n$ en ℓ^p.

I. Demostrar que el siguiente conjunto es un subespacio cerrado de ℓ^p:

$$\mathcal{F}_n := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad \forall k > n \quad a_k = 0\}.$$

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Segunda demostración: usar la completez de ℓ^p y un encaje de $\mathbb{C}^n$ en ℓ^p.

I. Demostrar que el siguiente conjunto es un subespacio cerrado de ℓ^p:

$$\mathcal{F}_n := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \quad \forall k > n \quad a_k = 0\}.$$

II. Definimos $J\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{F}_n$,

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Demostrar que J es un biyección isométrica, si consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ y $\mathcal{F}_n$ con la restriccion de la norma de $\|\cdot\|_p$ de ℓ^p.

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

Lema

Sea $(a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces

$$(a_s)_{s\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall k \in \{1,\ldots,n\} \quad \big((a_s)_k\big)_{s\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy.}$$

La completez del espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

Lema

Sea $(a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces

$$(a_s)_{s\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \big((a_s)_k\big)_{s\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy.}$$

Lema

Sea $(a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$, y sea $b \in \mathbb{C}^n$.

$$\lim_{s\to\infty} \|a_s - b\|_p = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \lim_{s\to\infty} (a_s)_k = b_k.$$

Otras normas en $\mathbb{C}^n$

Hay muchas otras normas en $\mathbb{C}^n$. Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^{n} (k+1)|a_k|,$$

Otras normas en $\mathbb{C}^n$

Hay muchas otras normas en $\mathbb{C}^n$. Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^{n} (k+1)|a_k|,$$

$$N_2(a) := \|a\|_\infty + 7\|a\|_2,$$

Otras normas en $\mathbb{C}^n$

Hay muchas otras normas en $\mathbb{C}^n$. Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^{n} (k+1)|a_k|,$$

$$N_2(a) := \|a\|_\infty + 7\|a\|_2,$$

$$N_3(a) := \max\{|a_1| + |a_2|, \quad |a_2| + |a_3|, \quad \ldots, \quad |a_{n-1}| + |a_n|\}.$$

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \le C\, N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \iff \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

Observación. Si $N_1 \leq N_2$, entonces $N_1 \preceq N_2$.

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Ejercicio. Demostrar que $\asymp$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

En efecto, para a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|a\|_2.$$

Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio. En el espacio $\mathbb{C}^n$ consideramos las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$, donde

$$1 \le p < q \le +\infty.$$

I. Demostrar que $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$.
II. Demostrar directamente que $\|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q$, es decir, encontrar una constante $C_{n,p,q} > 0$ tal que

$$\forall a \in \mathbb{C}^n \qquad \|a\|_p \le C_{p,q,n}\|a\|_q.$$

Sugerencia para II: aplicar de manera apropiada la desigualdad de Hölder.

Observación. Más adelante, demostraremos de manera no constructiva que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Compactos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

Proposición (criterio de subconjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (o $A \subseteq \mathbb{C}^n$). Entonces A es compacto $\iff$

Compactos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

Proposición (criterio de subconjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (o $A \subseteq \mathbb{C}^n$). Entonces A es compacto $\iff$ A es cerrado y acotado.

Proposición (el mínimo y máximo de un conjunto compacto no vacío en $\mathbb{R}$)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, A compacto, $A \neq \emptyset$. Entonces

$$\inf(A) \in A, \qquad \sup(A) \in A.$$

Funciones continuas, definidas en compactos (repaso)

Proposición (la imagen de un compacto bajo una función continua)

Sean X, Y espacios topológicos, X compacto, y sea $f \in C(X, Y)$.

Entonces $f[X]$ es compacto.

Funciones continuas, definidas en compactos (repaso)

Proposición (la imagen de un compacto bajo una función continua)

Sean X, Y espacios topológicos, X compacto, y sea $f \in C(X, Y)$.

Entonces $f[X]$ es compacto.

Corolario (el mínimo y máximo de una función real continua en un compacto)

Sea X un espacio topológico compacto no vacío, y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Entonces

$$\inf(f[X]) \in f[X], \qquad \sup(f[X]) \in f[X].$$

En otras palabras, existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = \inf(f[X])$, $f(y) = \sup(f[X])$.

La desigualdad inversa del triángulo para las normas (repaso)

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio normado. Demostrar que para cada a, b en V,

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b).$$

Sugerencia: $|t| \leq u \quad \Longleftrightarrow \quad -u \leq t \leq u.$

Teorema

Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N \asymp \|\cdot\|_2$.

1. Demostremos que $N \preceq \|\cdot\|_2$.

Denotemos por e_k al k-ésimo vector de la base canónica: $e_k := [\delta_{k,r}]_{r=1}^n$. Sea

$$M := \left(\sum_{k=1}^n N(e_k)^2\right)^{1/2}.$$

Para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$N(a) = N\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^n |a_k|\, N(e_k) \leq M\,\|a\|_2.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio $\mathbb{C}^n$ de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b) \leq M \, \|a - b\|_2.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio $\mathbb{C}^n$ de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a-b) \leq M\,\|a-b\|_2.$$

3. La función N alcanza su valor mínimo en la esfera euclideana.

$$S := \{a \in \mathbb{C}^n : \quad \|a\|_2 = 1\}.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio $\mathbb{C}^n$ de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \le N(a-b) \le M\,\|a-b\|_2.$$

3. La función N alcanza su valor mínimo en la esfera euclideana.

$$S := \{a \in \mathbb{C}^n : \quad \|a\|_2 = 1\}.$$

Como N es continua y S es un compacto, existe x en S tal que $N(x) = \inf(N[S])$.

Denotamos $N(x)$ por C. Como $x \neq 0_n$ y N es una norma, tenemos $C > 0$.

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en $\mathbb{C}^n$,

$$\|y\|_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) \geq C.$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en $\mathbb{C}^n$,

$$\|y\|_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $\boxed{y = \frac{1}{\|x\|_2} x}$ y obtenemos

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en $\mathbb{C}^n$,

$$\|y\|_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $y = \dfrac{1}{\|x\|_2} x$ y obtenemos

$$N(x) = N(\|x\|_2\, y) = \|x\|_2 N(y) \geq C\,\|x\|_2,$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en $\mathbb{C}^n$,

$$\|y\|_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $\boxed{y = \frac{1}{\|x\|_2}\, x}$ y obtenemos

$$N(x) = N(\|x\|_2\, y) = \|x\|_2 N(y) \geq C\, \|x\|_2,$$

esto es,

$$\|x\|_2 \leq \frac{1}{C}\, N(x).$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en $\mathbb{C}^n$,

$$\|y\|_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $\boxed{y = \frac{1}{\|x\|_2} x}$ y obtenemos

$$N(x) = N(\|x\|_2\, y) = \|x\|_2 N(y) \geq C\, \|x\|_2,$$

esto es,

$$\|x\|_2 \leq \frac{1}{C} N(x).$$

Esta desigualdad también se cumple para $x = 0_n$. □

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración. Sabemos que

$$N_1 \asymp \|\cdot\|_2, \qquad N_2 \asymp \|\cdot\|_2.$$

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración. Sabemos que

$$N_1 \asymp \|\cdot\|_2, \qquad N_2 \asymp \|\cdot\|_2.$$

Usamos el hecho que $\asymp$ es una relación de equivalencia. $\square$

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Todas las normas en $\mathbb{C}^n$ inducen la misma topología.

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Todas las normas en $\mathbb{C}^n$ inducen la misma topología.

Corolario

Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $(\mathbb{C}^n, N)$ es de Banach.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración, inicio

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración, inicio

Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración, inicio

Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $\quad T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k.$$

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración, inicio

Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k.$$

Entonces T es un isomorfismo lineal.

Demostración, final.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v)$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) =$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x))$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \le C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) =$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \le C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha)$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha)$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha) =$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \le C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \le C\,\nu_2(\alpha) = C\,N_2(T(x))$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha) = C\,N_2(T(x)) =$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha) = C\,N_2(T(x)) = C\,N_2(v).$$

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha) = C\,N_2(T(x)) = C\,N_2(v).$$

Hemos mostrado que $N_1 \prec N_2$.

Demostración, final.

Definimos $\nu_1, \nu_2 \colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$\nu_1(\alpha) := N_1(T(\alpha)), \qquad \nu_2(\alpha) := N_2(T(\alpha)).$$

Entonces ν_1 y ν_2 son normas en $\mathbb{C}^n$. Luego $\nu_1 \asymp \nu_2$.

En particular, existe $C > 0$ tal que $\nu_1 \leq C\nu_2$.

Para cada v en V, ponemos $\alpha = T^{-1}(v)$. Luego

$$N_1(v) = N_1(T(x)) = \nu_1(\alpha) \leq C\,\nu_2(\alpha) = C\,N_2(T(x)) = C\,N_2(v).$$

Hemos mostrado que $N_1 \prec N_2$. De manera similar, $N_2 \prec N_1$.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $\quad T\colon \mathbb{C}^n \to V, \quad \nu\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty),$

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k, \qquad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como $b_1, \ldots, b_n$ es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $\quad T\colon \mathbb{C}^n \to V, \quad \nu\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty),$

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k, \qquad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como $b_1, \ldots, b_n$ es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en $\mathbb{C}^n$. Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$, $\nu\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k, \qquad \nu(\alpha) \coloneqq N(T(\alpha)) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como $b_1, \ldots, b_n$ es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en $\mathbb{C}^n$. Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Como $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo, $(\mathbb{C}^n, \nu)$ es completo.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea $b_1, \ldots, b_n$ una base en V.

Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$, $\nu\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k, \qquad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como $b_1, \ldots, b_n$ es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en $\mathbb{C}^n$. Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Como $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo, $(\mathbb{C}^n, \nu)$ es completo.

Como $T\colon (\mathbb{C}^n, \nu) \to (V, N)$ es una isometría biyectiva, (V, N) es completo. $\square$

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Por la proposición anterior, este espacio es completo.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Por la proposición anterior, este espacio es completo.

Por consecuencia, W es cerrado en V. $\square$