Normas en $\mathbb{C}^n$

Objetivos. Recordar la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$. Demostrar que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Sea $n \geq 1$. En estos apuntes trabajamos con el espacio $\mathbb{C}^n$, pero resultados similares se tienen también para $\mathbb{R}^n$.

Las normas canónicas en $\mathbb{C}^n$

1 Proposición. *Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,*

$$N_p(a) := \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Entonces N_p es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Demostración. La propiedad subaditiva es la desigualdad de Minkowski, y las demás propiedades se verifican fácilmente. □

2 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$\lim_{p \to +\infty} N_p(a) = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Demostración. Pongamos $M := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$. Entonces

$$M \leq N_p(a) \leq n^{1/p} M.$$

Pasamos al límite cuando p tiende a $+\infty$ y obtenemos el resultado. □

3 Proposición. *Definimos $N_\infty\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,*

$$N_\infty(a) := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Entonces N_∞ es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Si $a, b \in \mathbb{C}^n$, entonces para cada k en $\{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq N_\infty(a) + N_\infty(b).$$

Luego $N_\infty(a + b) \leq N_\infty(a) + N_\infty(b)$. Otras propiedades de norma también se verifican fácilmente. $\square$

En vez de $N_p(a)$ se escribe $\|a\|_p$.

4 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$\|a\|_\infty \leq \|a\|_2 \leq \|a\|_1,$$

$$\|a\|_1 \leq \sqrt{n}\|a\|_2, \qquad \|a\|_2 \leq \sqrt{n}\|a\|_\infty.$$

5 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V. Recuerde qué significa la notación $N_1 \preceq N_2$ y qué significa la notación $N_1 \sim N_2$.

Equivalencia de las normas en $\mathbb{C}^n$

6 Proposición. *Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N \sim \|\cdot\|_2$.*

Demostración. Pongamos $S := \{a \in \mathbb{C}^n\colon\ \|a\|_2 = 1\}$. Por ser acotado y cerrado en $\mathbb{C}^n$, S es compacto. Definimos $f\colon S \to [0, +\infty)$,

$$f(a) := N(a).$$

Denotemos por $e_1, \ldots, e_n$ a la base canónica en $\mathbb{C}^n$ y pongamos

$$C := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} N(e_k)^2}.$$

Apliquemos las propiedades de la norma N y la desigualdad de Hölder para $p = 2$ (la desigualdad de Cauchy):

$$N(a) = N\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| N(e_k) \leq C\|a\|_2.$$

Luego para cualesquiera u, v en S

$$|f(u) - f(v)| = |N(u) - N(v)| \leq N(u - v) \leq C\|u - v\|_2.$$

Esto implica que la función f es continua. Siendo una función continua en un compacto, f alcanza su valor mínimo. Lo denotemos por C_1. Como existe u en S tal que $f(u) = C_1$, concluimos que $C_1 > 0$. Ahora para cualquier v en $\mathbb{C}^n$ con $v \neq 0$ obtenemos $\frac{1}{\|v\|_2} v \in S$ y por eso

$$N(v) = \|v\|\, N\left(\frac{1}{\|v\|_2} v\right) \geq C_1 \|v\|_2.$$

Hemos mostrado que N y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes. $\square$