

# Comparación de normas (un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,  
<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)  
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de marzo de 2022

- 1 Introducción
- 2 Comparación de normas: definición
- 3 Ejemplos
- 4 Comparación de normas y topologías
- 5 Comparacion de normas y sucesiones de Cauchy

# Objetivos

- Definir las relaciones  $\preceq$  y  $\asymp$  para normas en un espacio vectorial.
- Mostrar que la comparación de normas está relacionada con la comparación de topologías.
- Aplicar a la convergencia de sucesiones y sucesiones de Cauchy.

# Prerrequisitos

- Espacios normados.
- Comparación de topologías.

# Comparación de normas en un espacio vectorial

## Definición ( $N_2$ domina $N_1$ )

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

# Comparación de normas en un espacio vectorial

## Definición ( $N_2$ domina $N_1$ )

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

**Ejercicio.** Demostrar que la relación binaria  $\preceq$  es transitiva y reflexiva.

# Comparación de normas en un espacio vectorial

## Definición ( $N_2$ domina $N_1$ )

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

**Ejercicio.** Demostrar que la relación binaria  $\preceq$  es transitiva y reflexiva.

**Observación.** Si  $N_1 \leq N_2$ , entonces  $N_1 \preceq N_2$ .

# Equivalencia de normas en un espacio vectorial

## Definición (equivalencia de normas)

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \asymp N_2 \iff (N_1 \preceq N_2) \wedge (N_2 \preceq N_1).$$



# Equivalencia de normas en un espacio vectorial

## Definición (equivalencia de normas)

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \asymp N_2 \iff (N_1 \preceq N_2) \wedge (N_2 \preceq N_1).$$

**Ejercicio.** Demostrar que  $\asymp$  es una relación de equivalencia.

# Equivalencia de normas en un espacio vectorial

## Definición (equivalencia de normas)

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

$$N_1 \asymp N_2 \iff (N_1 \preceq N_2) \wedge (N_2 \preceq N_1).$$

**Ejercicio.** Demostrar que  $\asymp$  es una relación de equivalencia.

**Ejercicio.** Demostrar que

$$N_1 \asymp N_2 \iff \exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall v \in V \quad C_1 N_1(v) \leq N_2(v) \leq C_2 N_1(v).$$

# Ejemplo de comparación de normas

En el espacio  $\mathbb{C}^n$ ,  $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$ .

## Ejemplo de comparación de normas

En el espacio  $\mathbb{C}^n$ ,  $\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$ .

En efecto, para  $a$  en  $\mathbb{C}^n$ ,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left( \sum_{k=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|a\|_2.$$

# Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$

**Ejercicio.** En el espacio  $\mathbb{C}^n$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_p$  y  $\|\cdot\|_q$ , donde

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Demostrar directamente que

$$\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p, \quad \|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q.$$

# Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$

**Ejercicio.** En el espacio  $\mathbb{C}^n$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_p$  y  $\|\cdot\|_q$ , donde

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Demostrar directamente que

$$\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p, \quad \|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q.$$

**Observación.** En una de las siguientes clases demostraremos que cualesquiera dos normas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes.

## Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio  $\ell^1$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

## Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio  $\ell^1$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

Mostremos que  $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$ .



## Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio  $\ell^1$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

Mostremos que  $\|\cdot\|_1 \not\leq \|\cdot\|_\infty$ .

Para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ ,

$$s_m := (\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots) = \sum_{k=1}^m e_k.$$

## Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio  $\ell^1$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

Mostremos que  $\|\cdot\|_1 \not\leq \|\cdot\|_\infty$ .

Para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ ,

$$s_m := (\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots) = \sum_{k=1}^m e_k. \qquad \frac{\|s_m\|_1}{\|s_m\|_\infty} = \frac{m}{1} = m.$$

## Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio  $\ell^1$  consideramos las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

Mostremos que  $\|\cdot\|_1 \not\leq \|\cdot\|_\infty$ .

Para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ ,

$$s_m := (\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots) = \sum_{k=1}^m e_k. \quad \frac{\|s_m\|_1}{\|s_m\|_\infty} = \frac{m}{1} = m.$$

Por lo tanto, no existe  $C > 0$  tal que

$$\forall a \in \ell^1 \quad \|a\|_1 \leq C \|a\|_\infty.$$

**Ejercicio.** Sean  $p, q$  tales que

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Construir una sucesión de sucesiones  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , donde  $a_m \in \ell^1$ , tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|a_m\|_p}{\|a_m\|_q} = +\infty.$$

Concluir que en el espacio  $\ell^1$  las normas  $\|\cdot\|_p$  y  $\|\cdot\|_q$  no son equivalentes.

# Comparación de normas y topologías

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

Denotamos de la siguiente manera las bolas correspondientes:

$$B_1(a, r) := \{v \in V : N_1(v - a) < r\}, \quad B_2(a, r) := \{v \in V : N_2(v - a) < r\}.$$

Sean  $\tau_1$  la topología inducida por  $N_1$  y  $\tau_2$  la topología inducida por  $N_2$ .

# Comparación de normas y topologías

## Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

Denotamos de la siguiente manera las bolas correspondientes:

$$B_1(a, r) := \{v \in V : N_1(v - a) < r\}, \quad B_2(a, r) := \{v \in V : N_2(v - a) < r\}.$$

Sean  $\tau_1$  la topología inducida por  $N_1$  y  $\tau_2$  la topología inducida por  $N_2$ .

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $N_1 \preceq N_2$ ,
- (b) para cada  $r_1 > 0$  existe  $r_2 > 0$  tal que  $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$ .
- (c)  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ .

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$



Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea  $A \in \tau_1$ . Demostremos que  $A \in \tau_2$ .

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea  $A \in \tau_1$ . Demostremos que  $A \in \tau_2$ .

Sea  $x \in A$ . Por la definición de  $\tau_1$ , encontramos  $r_1 > 0$  tal que  $B_1(x, r_1) \subseteq A$ .

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea  $A \in \tau_1$ . Demostremos que  $A \in \tau_2$ .

Sea  $x \in A$ . Por la definición de  $\tau_1$ , encontramos  $r_1 > 0$  tal que  $B_1(x, r_1) \subseteq A$ .

Usando la condición (b) encontramos  $r_2 > 0$  tal que  $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$ .

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea  $A \in \tau_1$ . Demostremos que  $A \in \tau_2$ .

Sea  $x \in A$ . Por la definición de  $\tau_1$ , encontramos  $r_1 > 0$  tal que  $B_1(x, r_1) \subseteq A$ .

Usando la condición (b) encontramos  $r_2 > 0$  tal que  $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$ .

Entonces

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1) \subseteq A.$$

Demostremos solamente una implicación,  $(b) \Rightarrow (c)$ . Las demás son ejercicios.

$(b) \Rightarrow (c)$ . Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 \quad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea  $A \in \tau_1$ . Demostremos que  $A \in \tau_2$ .

Sea  $x \in A$ . Por la definición de  $\tau_1$ , encontramos  $r_1 > 0$  tal que  $B_1(x, r_1) \subseteq A$ .

Usando la condición (b) encontramos  $r_2 > 0$  tal que  $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$ .

Entonces

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1) \subseteq A.$$

Como  $x$  es un punto arbitrario de  $A$ , hemos demostrado que  $A \in \tau_2$ .

### Corolario

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ . Denotemos por  $\tau_1$  y  $\tau_2$  las topologías correspondientes. Entonces

$$N_1 \asymp N_2 \iff \tau_1 = \tau_2.$$

# Comparación de normas y sucesiones convergentes

## Ejercicio.

Sean  $V$  un espacio vectorial,  $N_1, N_2$  normas en  $V$ ,  $N_1 \preceq N_2$ .

Sean  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ ,  $b \in V$ . Demostrar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} N_2(a_j - b) = 0 \quad \implies \quad \lim_{j \rightarrow \infty} N_1(a_j - b) = 0.$$

# Comparación de normas y sucesiones de Cauchy

## Ejercicio.

Sea  $V$  un espacio vectorial, sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ ,  $N_1 \preceq N_2$ .

Sea  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy respecto a  $N_2$ .

Demostrar que esta sucesión es de Cauchy respecto a  $N_1$ .



## Comparación de normas y sucesiones de Cauchy

### Ejercicio.

Sea  $V$  un espacio vectorial, sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ ,  $N_1 \preceq N_2$ .

Sea  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy respecto a  $N_2$ .

Demostrar que esta sucesión es de Cauchy respecto a  $N_1$ .

### Ejercicio.

Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $N_1, N_2$  normas en  $V$ .

Supongamos que  $N_1 \asymp N_2$  y el espacio  $(V, N_1)$  sea completo.

Demostrar que  $(V, N_2)$  es completo.