Comparación de normas

Objetivos. Introducir el concepto de que una norma mayoriza a otra y describir este concepto de varias maneras equivalentes.

Prerrequisitos. Norma, la métrica inducida por una norma, la topología inducida por una métrica, comparación de varias topologías en un conjunto.

Aplicaciones. Equivalencia de varias normas en $\mathbb{C}^n$.

1 Definición (una norma se mayoriza por otra)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V. Se dice que N_1 se *mayoriza* por N_2 y se escribe $N_1 \preceq N_2$ si existe $C > 0$ tal que para cada a en V

$$N_1(a) \le C N_2(a).$$

2 Proposición (criterio de que una norma se mayoriza por otra)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V. Denotemos por τ_1 y τ_2 a las topologías correspondientes y por $B_1(a,r)$ y $B_2(a,r)$ a las bolas correspondientes. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $N_1 \preceq N_2$.

(b) Existe $\delta > 0$ *tal que* $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$.

(c) $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Sea $C > 0$ tal que $N_1 \le C N_2$. Pongamos $\delta := \frac{1}{C}$. Para cada a en V, si $N_2(a) < \delta$, entonces $N_1(a) \le C N_2(a) < C\delta = 1$. Esto significa que $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$.

Supongamos (b) y demostremos (a). Sea δ tal que $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$. Pongamos $C := \frac{2}{\delta}$. Dado v en V con $v \ne 0_V$, pongamos $u := \frac{\delta}{2N_2(v)} v$. Entonces $N_2(u) = \delta/2 < \delta$ y $u \in B_2(0_V, \delta)$. Luego $u \in B_1(0_V, 1)$, esto es, $N_1(u) < 1$. Esto implica que $\frac{\delta N_1(v)}{2N_2(v)} < 1$, esto es,

$$N_1(v) < \frac{2}{\delta} N_2(v) = C N_2(v).$$

La desigualdad $N_1(v) \le C N_2(v)$ también se cumple para $v = 0_V$.

Supongamos (b) y demostremos (c). Sea $\delta > 0$ tal que $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$. Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$. Sea $a \in A$. Elegimos $r > 0$ tal que $B_1(a, r) \subseteq A$. Entonces

$$B_2(a, \delta r) = a + rB_2(0_V, \delta) \subseteq a + rB_1(0_V, 1) = B_1(a, r) \subseteq A.$$

Supongamos (c) y demostremos (b). Como $B_1(0_V, 1) \in \tau_1 \subseteq \tau_2$ y $0_V \in B_1(0_V, 1)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$. □

3 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V tales que $N_1 \preceq N_2$. Entonces cualquier sucesión de Cauchy en (V, N_2) es sucesión de Cauchy en (V, N_1).*

Demostración. Sea $C > 0$ tal que $N_1 \leq CN_2$. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (V, N_2). Mostremos que es una sucesión de Cauchy en (V, N_1). Dado $\varepsilon > 0$ encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que para cada j, k en $\mathbb{N}$ con $j, k \geq m$ se cumple $d_2(a_j, a_k) < \varepsilon/C$. Entonces para cada j, k en $\mathbb{N}$ con $j, k \geq m$ obtenemos

$$d_1(a_j, a_k) = N_1(a_j - a_k) \leq CN_2(a_j - a_k) = Cd_2(a_j, a_k) < \varepsilon.$$ □

Normas equivalentes

4 Definición (normas equivalentes)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V. Se dice que N_1 y N_2 son *equivalentes* y se escribe $N_1 \sim N_2$ si $N_1 \preceq N_2$ y $N_2 \preceq N_1$.

5 Corolario. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $N_1 \sim N_2$.

(b) Existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0_V, \delta) \subseteq B_1(0_V, 1)$ y $B_1(0_V, \delta) \subseteq B_2(0_V, 1)$.

(c) $\tau_1 = \tau_2$.

6 Corolario. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V tales que $N_1 \sim N_2$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto N_1 si, y solo si, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto N_2.*

7 Corolario. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1 y N_2 normas en V tales que $N_1 \sim N_2$. Supongamos que el espacio (V, N_1) es completo. Entonces (V, N_2) es completo.*