El cociente de espacios normados

(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de marzo de 2022

Objetivos

- Dado un espacio vectorial V y un subespacio vectorial W, repasar la definición del espacio cociente V/W.
- Si V es un espacio seminormado, definir una seminorma en V/W.
- Determinar, cuando V/W es normado.
- Demostrar que si V es completo, entonces V/W es completo.

Prerrequisitos

- El espacio cociente de espacios vectoriales.
- Seminorma y pseudométrica.
- La definición del ínfimo.
- Espacios de Banach.

Aplicaciones

- Definición de los espacios L^p que repasaremos en clases futuras:

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

- El concepto de conúcleo (cokérnel) de un operador lineal:

$$\operatorname{coker}(A) := \operatorname{codom}(A)/\operatorname{clos}(\operatorname{im}(A)).$$

- Ideales y álgebras cocientes $\mathcal{A}/J$ en álgebras de operadores.
  Un subespacio J del álgebra $\mathcal{A}$ se llama ideal si

$$J\mathcal{A} \subseteq J, \qquad \mathcal{A}J \subseteq J.$$

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V.

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V.

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V.

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio. Sea $a \in V$. Pongamos $[a]_{\underset{\sim}{W}} := \{b \in V : \quad b \overset{W}{\sim} a\}$.
Demostrar que $[a]_{\underset{\sim}{W}} = a + W$.

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V.

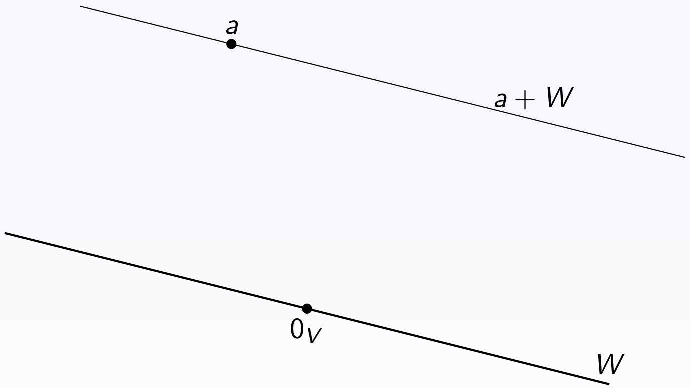
Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio. Sea $a \in V$. Pongamos $[a]_{\overset{W}{\sim}} := \{b \in V : \quad b \overset{W}{\sim} a\}$.
Demostrar que $[a]_{\overset{W}{\sim}} = a + W$.

Definición. $V/W := \{a + W : \ a \in V\}.$


a
$a + W$
0_V
W

Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $\quad a \overset{W}{\sim} u, \quad b \overset{W}{\sim} v, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que

$$(a+b) \overset{W}{\sim} (u+v), \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $a \overset{W}{\sim} u$, $b \overset{W}{\sim} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Demostrar que

$$(a+b) \overset{W}{\sim} (u+v), \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

Definición.

$$(a+W) \overset{V/W}{+} (b+W) := (a+b)+W,$$

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} (a+W) := (\lambda a)+W.$$

Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $\quad a \overset{W}{\sim} u$, $\quad b \overset{W}{\sim} v$, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$.
Demostrar que

$$(a+b) \overset{W}{\sim} (u+v), \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

Definición.

$$(a+W) \overset{V/W}{+} (b+W) := (a+b)+W,$$

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} (a+W) := (\lambda a)+W.$$

Ejercicio. Demostrar que V/W con estas operaciones es un espacio vectorial.

Otra descripción de la adición en V/W

Ejercicio. Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X \overset{V/W}{+} Y = X + Y.$$

Otra descripción de la adición en V/W

Ejercicio. Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X \overset{V/W}{+} Y = X + Y.$$

En otras palabras, si $a \in X$, $b \in Y$, demostrar que

$$\Big\{v \in V\colon \quad v - (a+b) \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y\Big\}.$$

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Ejercicio. Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Ejercicio. Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

En otras palabras, si $a \in X$, demostrar que

$$\Big\{v \in V\colon \quad v - \lambda a \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad v = \lambda x\Big\}.$$

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Ejercicio. Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

En otras palabras, si $a \in X$, demostrar que

$$\Big\{ v \in V : \quad v - \lambda a \in W \Big\} \quad = \quad \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad v = \lambda x \Big\}.$$

Ejercicio. Mostrar que $0 \overset{V/W}{\cdot} W$ puede no coincidir con $0\,W$.

Definición de seminorma (repaso)

Sea V un espacio vectorial. Una función $N\colon V \to [0, +\infty)$ se llama seminorma, si

(N1) es subaditiva:

$$\forall u, v \in V \qquad N(u+v) \le N(u) + N(v),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall u \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda u) = |\lambda| N(u).$$

Proposición (sobre la seminorma en el espacio cociente)

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea W un subespacio vectorial de V. Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una seminorma.

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y)$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v)$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X+Y) \le N(u+v) \le$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \le N(u + v) \le N(u) + N(v)$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v) \leq N(u) + N(v) <$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v) \leq N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X+Y) \le N(u+v) \le N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(X+Y) \le P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X+Y) \le N(u+v) \le N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(X+Y) \le P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, $P(X+Y) \le P(X) + P(Y)$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X =$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) =$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0 =$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso trivial

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0 = \lambda P(X).$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X =$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) =$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$.

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \le N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \le |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq |\lambda| N(v/\lambda)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq |\lambda| N(v/\lambda) =$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq |\lambda| N(v/\lambda) = N(v)$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq |\lambda| N(v/\lambda) = N(v) <$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \leq |\lambda| N(v/\lambda) = N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso principal

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \le N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \le |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda| P(X) \le |\lambda| N(v/\lambda) = N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Esto implica que $P(\lambda X) = |\lambda| P(X)$.

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) :=$$

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u\in X} N(u).$$

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Proposición

Para cada v en V,

$$P(v+W) \le N(v).$$

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u\in X} N(u).$$

Proposición

Para cada v en V,

$$P(v+W) \le N(v).$$

Demostración.

Una propiedad importante de P

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u\in X} N(u).$$

Proposición

Para cada v en V,

$$P(v+W) \le N(v).$$

Demostración. $v \in v + W$, por eso $\displaystyle\inf_{u\in v+W} N(u) \le N(v)$.

Ejemplo

Ejercicio. Consideramos $V = \mathbb{C}^2$ con la norma euclideana $\|\cdot\|_2$.

Sean

$$a := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Consideramos el subespacio $W := \operatorname{lin}(a)$ y el plano $X := b + W$.

Calcular $P(X)$.

Ejemplo

Recordatorio.

Ejemplo

Recordatorio.

$$c(\mathbb{N}) :=$$

Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes;

Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes;

$c_0(\mathbb{N}) :=$

Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes;

$c_0(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes al 0.

Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes;

$c_0(\mathbb{N}) :=$el espacio de las sucesiones convergentes al 0.

Ejercicio.

Construir un isomorfismo isométrico $T\colon \mathbb{C} \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$.

Criterio para que el espacio cociente sea normado

Proposición

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea W un subespacio vectorial de V. Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una norma $\iff$ W es cerrado.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada k.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada k. Luego $P(X) = 0$.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada k. Luego $P(X) = 0$.

Como P es una norma, $X = 0_{V/W} = W$.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada k. Luego $P(X) = 0$.

Como P es una norma, $X = 0_{V/W} = W$.

Por eso $b \in b + W = X = W$.

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0,$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,}$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k \to \infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como W es cerrado, X también es cerrado (ejercicio).

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como W es cerrado, X también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$,

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como W es cerrado, X también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$, esto es,

Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que W es cerrado. Demostremos que P es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k \to \infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como W es cerrado, X también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$, esto es, $X = W$.

Ejercicio sobre un conjunto cerrado desplazado

En la demostración anterior aplicamos una afirmación simple que se puede demostrar aparte y en una situación un poco más general.

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$. Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si A es abierto, entonces B es abierto.

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$. Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si A es cerrado, entonces B es cerrado.

Corolario: el espacio cociente de espacios normados

Corolario

Sea (V, N) un espacio normado, y sea W un subespacio vectorial de V.

Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una seminorma en V/W.

Más aún, P es una norma $\iff$ W es cerrado.

Corolario: la receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea

$$Z := N^{-1}[\{0\}], \qquad \text{esto es,} \qquad Z = \{u \in V: \quad N(u) = 0\}.$$

Definimos $P\colon V/Z \to [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$.

Entonces $(V/Z, P)$ es un espacio normado.

Corolario: la receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea

$$Z := N^{-1}[\{0\}], \qquad \text{esto es,} \qquad Z = \{u \in V : \quad N(u) = 0\}.$$

Definimos $P\colon V/Z \to [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$.
Entonces $(V/Z, P)$ es un espacio normado.

Ejercicio. Para demostrar el corolario, verificar que Z es un subespacio cerrado de V.

Completez del espacio cociente

Proposición

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces V/W es completo.

Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$, elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$.

Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$, elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1 \in X_1$.

Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W:

$$P(X_{k+1}-X_k)<\frac{1}{2^{k+1}},\qquad \text{esto es,}\qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$, elegimos $v_{k+1}\in X_{k+1}-X_k$ tal que $N(v_{k+1})<\frac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1\in X_1$. Luego pongamos $u_{k+1}:=u_k+v_{k+1}$ para cada k.

Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada k en $\mathbb{N}$, elegimos $\quad v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k \quad$ tal que $\quad N(v_{k+1}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1 \in X_1$. Luego pongamos $u_{k+1} := u_k + v_{k+1}$ para cada k.

Entonces $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$.

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$. Entonces $P(X_k - Y) \le N(u_k - z)$,

Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$. Entonces $P(X_k - Y) \le N(u_k - z)$, y

$$\lim_{k\to\infty} P(X_k - Y) = 0.$$

□

Completez del espacio cociente: demostración que utiliza series

Ejercicio. Suponemos las condiciones de la proposición anterior.

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V/W tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_k) < +\infty.$$

Demostrar que existe Y en V/W tal que

$$\lim_{m\to\infty} P\left(Y - \sum_{k=1}^{m} X_k\right) = 0.$$

Usando un criterio de completez de espacios normados (o seminormados), concluir que V/W es completo.

Completez del espacio cociente

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : \quad N(v) = 0\}.$$

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Completez del espacio cociente

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : \quad N(v) = 0\}.$$

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Corolario

Sea V un espacio de Banach, y sea W un subespacio cerrado de V.

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Resumen

- Dado un espacio seminormado (V, N) y un subespacio vectorial W de V, el espacio vectorial cociente V/W se puede dotar de la seminorma

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u) \qquad (X \in V/W).$$

- Si V es normado, V/W no necesariamente es normado.
- Para que V/W sea normado, es necesario y suficiente que W sea cerrado.
- Si V es de Banach y W es un subespacio cerrado de V, entonces V/W es de Banach.