Espacios normados

(un tema de análisis)

Egor Maximenko,
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

4 de febrero de 2022

Objetivos.

- Conocer la definición de espacios normados.
- Definir la distancia inducida por una norma.

Objetivos.

- Conocer la definición de espacios normados.
- Definir la distancia inducida por una norma.

Prerrequisitos.

- Espacios métricos.
- Experiencia de trabajar con varias normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

Definición de la norma

Sea V un espacio vectorial complejo.

Una función $N\colon V \to [0, +\infty)$ se llama **norma** en V si

(N1) es subaditiva:

$$\forall a, b \in V \qquad N(a+b) \le N(a) + N(b),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda a) = |\lambda| N(a),$$

(N3) es estrictamente positiva:

$$\forall a \in V \setminus \{0_V\} \qquad N(a) > 0.$$

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

Estructuras matemáticas que contiene un espacio normado:

- espacio vectorial, grupo abeliano,
- espacio métrico (lo repasaremos), espacio topológico,
- grupo abeliano topológico (lo veremos), espacio vectorial topológico (lo veremos).

Corolarios triviales de la definición de la norma

- $N(0_V) = 0$.
- Para cada a en V, $\qquad N(-a) = N(a)$.

Corolarios triviales de la definición de la norma

- $N(0_V) = 0.$
- Para cada a en V, $\qquad N(-a) = N(a).$

La condición (N3) se puede sustituir por la siguiente:

$$\forall a \in V \qquad N(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0_V.$$

La métrica inducida por una norma

Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces d es una métrica, esto es,

(D1) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ para cada $a, b, c \in V$,

(D2) $d(a, b) = d(b, a)$ para cada $a, b \in V$,

(D3) $d(a, a) = 0$ para cada a en V,

(D4) si $a, b \in V$ y $d(a, b) = 0$, entonces $a = b$.

La métrica inducida por una norma

Ejercicio. Recordar la demostración.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\text{(N1)}\quad \|v+w\| \le \|v\| + \|w\|,\\
&\text{(N2)}\quad \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|,\\
&\text{(N3)}\quad \|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0_V.\\[2em]
&\qquad\qquad d(a,b) := \|a-b\|.
\end{aligned}
}
\quad\Longrightarrow\quad
\boxed{
\begin{aligned}
&\text{(D1)}\quad d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b),\\
&\text{(D2)}\quad d(a,b) = d(b,a),\\
&\text{(D3)}\quad d(a,a) = 0,\\
&\text{(D4)}\quad d(a,b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b.
\end{aligned}
}
$$

Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces d es invariante bajo traslaciones simultáneas de dos argumentos y homogénea absoluta bajo dilataciones simultáneas de dos argumentos:

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in V && d(a + c, b + c) = d(a, b), \\ &\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} && d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b). \end{aligned}$$

Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea d una métrica en V tal que

$$\forall a, b, c \in V \qquad d(a + c, b + c) = d(a, b),$$

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b).$$

Demostrar que existe una única norma $\| \cdot \|$ que induce d.