Operadores normales

Objetivos. Demostrar un criterio elemental del operador normal.

Prerrequisitos. Operador adjunto.

1 Definición. Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es *normal* si $A^*A = I$.

Mencionemos que los operadores autoadjuntos (incluso los operadores positivos y las proyecciones ortogonales) y los operadores unitarios (que satisfacen $A^*A = I$ y $AA^* = I$) son normales.

2 Ejercicio. Mostrar que el operador del desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$ no es normal.

3 Definición (la parte real y la parte imaginaria de un operador)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Pongamos

$$\operatorname{Re}(A) := \frac{A + A^*}{2}, \qquad \operatorname{Im}(A) := \frac{A - A^*}{2\,\mathrm{i}}.$$

4 Proposición (descomposición de un operador en su parte real e imaginaria)**.** *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Mostrar que*

$$A = \operatorname{Re}(A) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(A), \qquad A^* = \operatorname{Re}(A) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(A),$$

y que los operadores $\operatorname{Re}(A)$ *e* $\operatorname{Im}(A)$ *son autoadjuntos.*

5 Proposición (criterio del operador normal)**.** *Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es normal, esto es, A conmuta con A^*;

(b) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para cada x en H;

(c) los operadores $\operatorname{Re}(A)$ *e* $\operatorname{Im}(A)$ *conmutan.*

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b).

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2.$$

Supongamos (b) y demostremos (a). Para cada x en H, tenemos

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 = \langle AA^*x, x\rangle.$$

Por eso $\langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle = 0$ para cada x en H. Como ya sabemos, esto implica que $A^*A - AA^*$ es el operador cero.

La equivalencia entre (a) y (c) se verifica con un cálculo directo y simple. Por ejemplo, supongamos (a) y demostremos (c).

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(A)\operatorname{Im}(A) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}}(A + A^*)(A - A^*) = \frac{1}{4\,\mathrm{i}}(A^2 - AA^* + A^*A - (A^*)^2)\\ &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}}(A^2 - (A^*)^2) = \frac{1}{4\,\mathrm{i}}(A - A^*)(A + A^*).\end{aligned}$$ $\square$