Propiedades espectrales elementales de operadores normales

Objetivos. Dado un operador lineal normal en un espacio de Hilbert, estudiar algunas propiedades básicas de sus valores y vectores propios.

Prerrequisitos. Definición y criterio del operador normal, definición del espectro puntual de un operador.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Dado un operador T en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por $\sigma_p(T)$ su espectro puntual:

$$\sigma_p(T) \coloneqq \big\{\lambda \in \mathbb{C}:\quad \ker(\lambda I - T) \neq \{0_H\}\big\}.$$

1 Proposición. *Si A es un operador normal y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\ker(\lambda I - A) = \ker((\lambda I - A)^*).$$

En otras palabras, si $h \in H$ y $Ah = \lambda h$, entonces $A^* h = \overline{\lambda} h$.

Demostración. Como A es normal, $\lambda I - A$ también es normal:

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) &= (\overline{\lambda} I - A^*)(\lambda I - A) = |\lambda|^2 I - \overline{\lambda} A - \lambda A^* - A^* A \\ &= |\lambda|^2 I - \lambda A^* - \overline{\lambda} A - A A^* = (\lambda I - A)(\overline{\lambda} I - A^*) \\ &= (\lambda I - A)(\lambda I - A)^*.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada h en H tenemos que

$$\|\lambda I - A\| = \|(\lambda I - A)^*\|.$$

Esto implica que $\ker(\lambda I - A) = \ker((\lambda I - A)^*)$. □

2 Proposición. *Si A es un operador normal y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces* $\ker(\lambda I - A)$ *es un espacio reduciente para A.*

Demostración. Si $h \in \ker(\lambda I - A)$, entonces

$$Ah = \lambda h \in \ker(\lambda I - A)$$

y

$$A^* h = \overline{\lambda} h \in \ker((\lambda I - A)^*) = \ker(\lambda I - A).$$

Hemos demostrado que $\ker(\lambda I - A)$ reduce al operador A. □

3 Proposición. *Si A es un operador normal, $\xi, \eta \in \sigma_p(A)$ y $\xi \neq \eta$, entonces*

$$\ker(\xi I - A) \perp \ker(\eta I - A).$$

4 Proposición. *Si $A \in \mathcal{B}(H)$, $A^* = A$ y $\lambda \in \sigma_p(A)$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $h \in \ker(\lambda I - A)$ y $h \neq 0_H$, entonces

$$(\lambda - \overline{\lambda})h = \lambda h - \overline{\lambda} h = Ah - A^* h = 0_H.$$

Por lo tanto, $\lambda = \overline{\lambda}$. □