

La norma inducida por un producto interno

Objetivos. Definir la norma inducida por un producto interno y demostrar sus propiedades elementales.

Prerrequisitos. Desigualdad de Schwarz, el concepto de norma.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ya hemos demostrado la *desigualdad* de Schwarz: para cada a, b en H

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle. \quad (1)$$

Recordemos también que

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle a, b \rangle) + \langle b, b \rangle \quad (2)$$

y que para cualquier número complejo z

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|. \quad (3)$$

1 Proposición. Definimos $N: H \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la regla

$$N(a) := \sqrt{\langle a, a \rangle}. \quad (4)$$

Entonces N es una norma en H .

Demostración. 1. Mostremos la propiedad subaditiva. Sean $a, b \in H$. Acotamos $N(a+b)^2$ usando (2), (3) y (1):

$$\begin{aligned} N(a+b)^2 &= \langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle a, b \rangle) + \langle b, b \rangle \leq N(a)^2 + 2|\langle a, b \rangle| + N(b)^2 \\ &\leq N(a)^2 + 2N(a)N(b) + N(b)^2 = (N(a) + N(b))^2. \end{aligned}$$

Al sacar la raíz cuadrada, obtenemos la propiedad subaditiva para N .

2. Verifiquemos la propiedad homogénea absoluta.

$$N(\lambda a)^2 = \langle \lambda a, \lambda a \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle a, a \rangle = |\lambda|^2 N(a)^2.$$

Al sacar la raíz cuadrada, obtenemos $N(\lambda a) = |\lambda|N(a)$.

3. Si $a \in H \setminus \{0_H\}$, entonces $\langle a, a \rangle > 0$ y $N(a) > 0$. □

En vez de $N(a)$, por lo común se escribe $\|a\|$. H siempre se considera como espacio normado con esta norma (inducida por el producto interno), con la métrica

$$d(a, b) := \|a - b\| = \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle},$$

y con la topología inducida por esta métrica.

Como ya hemos visto, la forma cuadrática, asociada a una forma sesquilineal, satisface la identidad de paralelogramo, y la forma sesquilineal se puede reconstruir a partir de su forma cuadrática por medio de la identidad de polarización. El producto interno es una forma sesquilineal, y la norma inducida es la raíz cuadrada de su forma cuadrática. Por lo tanto, se cumplen la identidad de paralelogramo y la identidad de polarización:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2). \quad (5)$$

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|a + i^k b\|^2. \quad (6)$$

2 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$. Demostrar que en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ no existe producto interno que induzca la norma $\|\cdot\|_p$. Sugerencia: verificar que

$$\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 \neq 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2).$$

Una tarea adicional: demostrar que si V es un espacio vectorial complejo normado, en el cual la norma satisface la identidad de paralelogramo, entonces en V se puede construir un producto interno que induce la norma original.