Ejemplo de Vitali de subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es Lebesgue-medible

Denotemos por $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y por μ la medida de Lebesgue. Sabemos que $\mathcal{F}$ y μ son invariantes bajo traslaciones: si $A \in \mathcal{F}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces $A+b \in \mathcal{F}$ y $\mu(A+b) = \mu(A)$.

1 Lema. *En el conjunto $\mathbb{R}$ consideremos la relación binaria*

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in \mathbb{Q}.$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia, la colección $\mathcal{E}$ de las clases de equivalencia forma una partición de $\mathbb{R}$, y cada elemento A de $\mathcal{E}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Es fácil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. El conjunto de las clases de equivalencia correspondientes por lo común se denota por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y se considera como el grupo cociente. Aquí no vamos a usar mucho la estructura algebraica. Sea $A \in \mathcal{E}$. Mostremos que A es denso en $\mathbb{R}$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$. Elegimos algún elemento a en A. Como $u - a < v - a$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe q en $\mathbb{Q}$ tal que $u - a < q < v - a$. Entonces $q + a \in A$ y $u < q + a < v$. $\square$

2 Teorema. *Existe un subconjunto V de $[0,1]$ tal que $V \notin \mathcal{F}$.*

Demostración. 1. Sea $\mathcal{E}$ como en el lema. Para cada A en $\mathcal{E}$, la intersección $A \cap [0,1]$ es no vacía. Pongamos

$$\mathcal{H} := \{A \cap [0,1] : \ A \in \mathcal{E}\}.$$

Entonces la colección $\mathcal{H}$ es una partición de $[0,1]$. Por el axioma de elección, existe un subconjunto V de $[0,1]$ tal que para cada H en $\mathcal{H}$ la intersección $V \cap H$ tiene exactamente un elemento. Esto implica que para cada A en $\mathcal{E}$ la intersección $A \cap V$ tiene exactamente un elemento.

2. Mostremos que V no es Lebesgue-medible. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que V es Lebesgue-medible. Numeramos los números racionales del segmento $[-1,1]$ en una sucesión $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, y pongamos $W_k := V + q_k$. Probemos que los conjuntos W_k son disjuntos a pares. Sean $j, k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \in W_j \cap W_k$. Entonces $x - q_j \in V$ y $x - q_k \in V$, pero $(x - q_j) - (x - q_k) = q_k - q_j \in \mathbb{Q}$, así $x - q_j \sim x - q_k$, y el conjunto V no puede tener dos representantes de una clase de equivalencia.

3. Probemos que

$$[0,1] \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k \subset [-1,2]. \tag{1}$$

Probemos la primera contención. Sea $x \in [0,1]$. Encontremos A en $\mathcal{E}$ tal que $x \in A$. Sea v en V tal que $A \cap V = \{v\}$. Entonces $x - v \in \mathbb{Q}$ y $-1 \le x - v \le 1$. Luego existe k en $\mathbb{N}$ tal que $x - v = q_k$. Esto implica que $x \in W_k$.

Probemos la segunda contención. Para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos $W_k = V + q_k \subset [0,1] + [-1,1] = [-1,2]$.

4. Como μ es invariante bajo traslaciones, tenemos $W_k \in \mathcal{F}$ y $\mu(W_k) = \mu(V)$ para cada k en $\mathbb{N}$. Aplicamos μ a todos lados de (1), usando la propiedad monótona y σ-aditiva de μ:

$$\mu([0,1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(W_k) \leq [-1,2],$$

esto es,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3.$$

El último sistema de desigualdades es contradictorio. Si $\mu(V) = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) = 0 < 1$, y si $\mu(V) > 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(V) = +\infty > 3$. $\square$