Operadores de multiplicación en los espacios ℓ^p

Objetivos. Dada una sucesión acotada a, definir el operador de multiplicación M_a en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ y calcular su norma.

Prerrequisitos. Espacios de sucesiones ℓ^p, operadores lineales acotados, la norma de un operador lineal acotado.

1 Definición (el producto de dos sucesiones por componentes)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definimos $ab\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$(ab)_k \coloneqq a_k b_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

En otras palabras, si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, entonces

$$ab = \Big(a_k b_k\Big)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots\Big).$$

En este tema usamos la notación breve ℓ^p para los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$.

2 Lema. *Sean $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^\infty$, $x \in \ell^p$. Entonces $ax \in \ell^p$ y*

$$\|ax\|_p \;\le\; \|a\|_\infty \, \|x\|_p.$$

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$ se tiene la desigualdad $|a_k| \le \|a\|_\infty$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(ax)_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \, |x_k|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|a\|_\infty^p \, |x_k|^p = \|a\|_\infty^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \|a\|_\infty^p \|x\|_p^p.$$

De aquí se sigue el resultado requerido. □

3 Definición. Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty$. Definimos $M_a\colon \ell^p \to \ell^p$,

$$M_a(x) \coloneqq ax.$$

El Lema 2 garantiza que la Definición 3 es consistente, es decir, los valores de la función M_a de verdad pertenecen al espacio ℓ^p.

4 Definición (sucesiones básicas)**.** Dado j en $\mathbb{N}$, definimos $e_j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$,

$$(e_j)_k \coloneqq \delta_{j,k}.$$

5 Lema. *Sean $p \in [1, +\infty)$, $j \in \mathbb{N}$. Entonces $e_j \in \ell^p$ y $\|e_j\|_p = 1$.*

Demostración. En efecto, para $m \geq j$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{m} |(e_j)_k|^p = \sum_{k=1}^{m} |\delta_{j,k}|^p = 1.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |(e_j)_k|^p = 1$. □

6 Lema. *Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty$.*

7 Proposición. *Sea $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^\infty$. Entonces $M_a \in \mathcal{B}(\ell^p)$ y*

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty.$$

Demostración. Usando propiedades conocidas de números complejos es fácil ver que la función M_a es lineal. Por el Lema 2, el operador M_a es acotado y $\|M_a\| \leq \|a\|_\infty$.

Por otro lado, para cada j en $\mathbb{N}$ tenemos que

$$e_j \in \ell^p, \qquad \|e_j\|_p = 1, \qquad M_a e_j = a_j e_j, \qquad \|M_a e_j\|_p = |a_j|\,\|e_j\|_p = |a_j|.$$

Por lo tanto,

$$\|M_a\| = \sup_{\substack{x \in \ell^p \\ \|x\|_p \leq 1}} \|M_a x\|_p \geq \|M_a e_j\|_p \geq |a_j|.$$

El número $\|M_a\|$ es una cota superior del conjunto

$$\{|a_j| : \ j \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$. □

8 Ejercicio. Demostrar análogos de los resultados de este tema para el operador M_a en el espacio ℓ^∞.

9 Ejercicio. Demostrar análogos de los resultados de este tema para el operador M_a en el espacio c_0.