Teorema de la convergencia monótona (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

8 de junio de 2021

Plan

Objetivo: demostrar el teorema de la convergencia monótona (seguimos el camino de los libros de Bartle y Rudin).

Objetivo: demostrar el teorema de la convergencia monótona (seguimos el camino de los libros de Bartle y Rudin).

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida
y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ a la función límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Completez del espacio L^p

Teorema de la convergencia dominada

Lema de Fatou

Teorema de la convergencia monótona

Propiedad σ-subaditiva de medida

Medida de la unión de una suc. crec.

Propiedad σ-aditiva de medida

Prerrequisitos:

- el concepto de límite de una sucesión numérica,
- el supremo puntual de una sucesión de funciones medibles es medible,
- la continuidad de la medida por abajo,
- la medida φ definida como $\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu$, con s simple medible positiva,
- la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles,
- la monotonía de la integral de Lebesgue.

El teorema de la convergencia monótona tiene muchas aplicaciones.

Aplicaciones más cercanas:

- el lema de Fatou,
- la integral de la suma de dos funciones positivas,
- la integral de una serie de funciones positivas,
- la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración,
- la completez del espacio L^p.

Sucesiones crecientes de números

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq a_{n+1}.$$

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama estrictamente creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+1}.$$

Sucesiones crecientes de números

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama **creciente** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq a_{n+1}.$$

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama **estrictamente creciente** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+1}.$$

Proposición

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente
si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente
si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

La misma condición de manera formal:

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \le f_{n+1}(x).$$

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

La misma condición de manera formal:

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

El supremo de una sucesión de funciones medibles

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

Definimos $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

La medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una medida y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en X. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) =$$

La medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una medida y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en X. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

La medida definida como una integral

$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) :=$ funciones simples medibles positivas.

Proposición

Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

La definición de la integral de Lebesgue de funciones medibles positivas

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\Phi_f := \left\{ s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : \quad s \le f \right\}.$$

Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu : \quad s \in \Phi_f \right\}.$$

Propiedades monótonas de la integral de Lebesgue

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Observación crucial sobre límites y desigualdades

Sea $y \in [0, +\infty)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$.

Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

¿Podemos afirmar que existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $x_n \geq y$?

Lema elemental 1

Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Lema elemental 1

Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial.

Lema elemental 1

Sean $\quad y \in [0, +\infty), \quad c \in (0, 1), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial. Supongamos $y > 0$.

Lema elemental 1

Sean $\quad y \in [0, +\infty), \quad c \in (0, 1), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}.$ Supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial. Supongamos $y > 0$. $L := \lim_{n \to \infty} x_n$. Entonces

$$cy < y \leq L.$$

Lema elemental 1

Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial. Supongamos $y > 0$. $L := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Entonces

$$cy < y \leq L.$$

Pongamos $\varepsilon := L - cy$. Entonces $\varepsilon > 0$.

Lema elemental 1

Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial. Supongamos $y > 0$. $L := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Entonces

$$cy < y \leq L.$$

Pongamos $\varepsilon := L - cy$. Entonces $\varepsilon > 0$. Luego $\quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$.

Lema elemental 1

Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Caso $y = 0$: trivial. Supongamos $y > 0$. $L := \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces

$$cy < y \leq L.$$

Pongamos $\varepsilon := L - cy$. Entonces $\varepsilon > 0$. Luego $\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$.
Definimos $m := k$. Entonces

$$x_m = x_k > L - \varepsilon = cy. \qquad \square$$

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple.

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple.

Si $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple.

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple.

Si $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple. Consideremos el caso $0 < b < +\infty$.

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple.

Si $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple. Consideremos el caso $0 < b < +\infty$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $a < b$.

$$c_0 := \frac{a + b}{2b}.$$

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple.

Si $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple. Consideremos el caso $0 < b < +\infty$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $a < b$.

$$c_0 := \frac{a + b}{2b}.$$

Entonces $c_0 \in (0, 1)$. Por la suposición, debe ser $a \geq c_0 b$.

Lema elemental 2

Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo c en $(0, 1)$. Entonces $a \geq b$.

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple. Si $b = 0$, entonces la desigualdad se cumple. Consideremos el caso $0 < b < +\infty$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $a < b$.

$$c_0 := \frac{a + b}{2b}.$$

Entonces $c_0 \in (0, 1)$. Por la suposición, debe ser $a \geq c_0 b$. Pero

$$c_0 b = \frac{a + b}{2b} \cdot b = \frac{a + b}{2} > a.$$

Contradicción. $\square$

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida
y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ a la función límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \leq f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$.

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \leq f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \leq f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \leq g$, así que

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \leq f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \leq g$, así que

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \le f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \le g$, así que

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando n tiende a infinito:

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \le f_{n+1}$ se sigue que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \le g$, así que

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando n tiende a infinito:

$$\alpha \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \le f_{n+1}$ se sigue que $\displaystyle\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \le g$, así que

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando n tiende a infinito:

$$\alpha \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Falta demostrar que $\alpha \ge \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

$\Rightarrow$

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es,

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \leq g$.

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \leq g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \geq s(x).$$

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \le g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \ge s(x).$$

Supongamos que $c \in (0, 1)$. Por el Lema elemental 1,

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \le g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \ge s(x).$$

Supongamos que $c \in (0, 1)$. Por el Lema elemental 1,

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \ge c\, s(x). \tag{1}$$

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \leq g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \geq s(x).$$

Supongamos que $c \in (0, 1)$. Por el Lema elemental 1,

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \geq c\, s(x). \tag{1}$$

Definimos

$$B_n := \{x \in X : \; f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \le g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \ge s(x).$$

Supongamos que $c \in (0, 1)$. Por el Lema elemental 1,

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \ge c\, s(x). \tag{1}$$

Definimos

$$B_n := \{x \in X : \ f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{F}$.

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \leq g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \geq s(x).$$

Supongamos que $c \in (0, 1)$. Por el Lema elemental 1,

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \geq c\, s(x). \tag{1}$$

Definimos

$$B_n := \{x \in X:\ \ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{F}$.

La afirmación (1) significa que

Demostración, empezamos la parte principal.

Supongamos que $s \in \Phi_g$, esto es, $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $s \le g$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \ge s(x).$$

Supongamos que $c \in (0,1)$. Por el Lema elemental 1,

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \ge c\, s(x). \tag{1}$$

Definimos

$$B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{F}$.

La afirmación (1) significa que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X.$$

$\Rightarrow$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq c s(x)\}.$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu.$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X \colon \ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X \colon\ f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \,\mathrm{d}\mu =$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X \colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s\,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) =$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s\,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) =$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X \colon \ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Por la monotonía de la integral,

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Por la monotonía de la integral,

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{B_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \ge$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por la monotonía de la integral,

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu.$$

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por la monotonía de la integral,

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando $n \to \infty$:

Continuamos la demostración. Hemos mostrado que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \qquad \text{donde} \qquad B_n := \{x \in X\colon\ f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Definimos $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicamos la continuidad de φ por abajo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por la monotonía de la integral,

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{B_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \int_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando $n \to \infty$: $\quad \alpha \ge c \displaystyle\int_X s \, \mathrm{d}\mu.$

$\Rightarrow$

Demostración, la parte final.

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \geq c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \ge c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por el Lema elemental 2,

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \geq c \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Por el Lema elemental 2,

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \alpha \geq \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \geq c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por el Lema elemental 2,

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \alpha \geq \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego α es una cota superior del conjunto

$$\left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \Phi_g \right\}.$$

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \ge c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Por el Lema elemental 2,

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \alpha \ge \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego α es una cota superior del conjunto

$$\left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \Phi_g \right\}.$$

Aplicamos la definición del supremo y luego la definición de $\int$ para funciones positivas:

$$\alpha \ge \sup \left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad s \le f \right\} =$$

Demostración, la parte final. Hemos mostrado que

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \forall c \in (0,1) \qquad \alpha \geq c \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Por el Lema elemental 2,

$$\forall s \in \Phi_g \qquad \alpha \geq \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Luego α es una cota superior del conjunto

$$\left\{ \int_X s \,\mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \Phi_g \right\}.$$

Aplicamos la definición del supremo y luego la definición de $\int$ para funciones positivas:

$$\alpha \geq \sup \left\{ \int_X s \,\mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad s \leq f \right\} = \int_X g \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Consecuencia: $\int^{(2)}$ como límite de $\int^{(1)}$

Sabemos que para cada función $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$s_n \nearrow f.$$

Consecuencia: $\int^{(2)}$ como límite de $\int^{(1)}$

Sabemos que para cada función $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$s_n \nearrow f.$$

Ahora el teorema de la convergencia monótona garantiza que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu =$$

Consecuencia: $\int^{(2)}$ como límite de $\int^{(1)}$

Sabemos que para cada función $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$s_n \nearrow f.$$

Ahora el teorema de la convergencia monótona garantiza que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Consecuencia: $\int^{(2)}$ como límite de $\int^{(1)}$

Sabemos que para cada función $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$
existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que

$$s_n \nearrow f.$$

Ahora el teorema de la convergencia monótona garantiza que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Más aún, $\int_X s_n \,\mathrm{d}\mu$ no depende de la elección de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Es una receta cómoda para calcular $\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$, en términos de $\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$.