

Clases monótonas de conjuntos

Objetivos. Definir clases monótonas de conjuntos y mostrar su relación con σ -álgebras.

Requisitos. σ -álgebras de conjuntos, anillos y álgebras de conjuntos, semianillos y semiálgebras de conjuntos.

1 Definición (clase monótona de conjuntos). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ se llama *clase monótona* sobre X si cumple con las siguientes propiedades.

1. Para cada sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente con valores en \mathcal{M} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.
2. Para cada sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente con valores en \mathcal{M} , $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{M}$.

2 Ejercicio (el conjunto potencia es una clase monótona). Sea X un conjunto. Demostrar que 2^X es una clase monótona.

3 Ejercicio (cada σ -álgebra es una clase monótona). Sea X un conjunto y sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X . Demostrar \mathcal{F} es una clase monótona sobre X .

4 Proposición. *La intersección de un conjunto no vacío de clases monótonas sobre X es una clase monótona sobre X .*

Idea de demostración. En la definición de clase monótona se utiliza solamente el cuantificador \forall y no se utiliza el cuantificador \exists . Dos cuantificadores \forall se intercambian. \square

5 Corolario. *Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Consideremos el siguiente conjunto de colecciones de conjuntos:*

$$\Lambda := \left\{ \mathcal{M} \subseteq 2^X : \mathcal{M} \text{ es una clase monótona} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M} \right\}.$$

Pongamos $\mathcal{N} := \bigcap \Lambda$, esto es,

$$\mathcal{N} := \left\{ A \in 2^X : \forall \mathcal{M} \in \Lambda \quad A \in \mathcal{M} \right\}.$$

Entonces, \mathcal{N} es el elemento mínimo de Λ .

Demostración. Notemos que $2^X \in \Lambda$. Por la Proposición 4, \mathcal{N} es una clase monótona. Además, como cada elemento de Λ contiene a \mathcal{C} , obtenemos que \mathcal{N} contiene a \mathcal{C} . Por lo tanto, $\mathcal{N} \in \Lambda$. Si $\mathcal{M} \in \Lambda$, entonces por la definición de $\bigcap \Lambda$ tenemos que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Hemos demostrado que \mathcal{N} es el elemento mínimo de Λ . \square

6 Definición (la clase monótona generada por una colección de conjuntos). Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Consideremos el siguiente conjunto de colecciones de conjuntos:

$$\Lambda := \left\{ \mathcal{M} \subseteq 2^X : \mathcal{M} \text{ es una clase monótona} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M} \right\}.$$

La *clase monótona generada por \mathcal{C}* se define como $\bigcap \Lambda$. De manera equivalente, es el elemento mínimo de Λ . En otras palabras, es la mínima entre todas las clases monótonas sobre X que contienen a \mathcal{C} .

7 Lema. Sea X un conjunto y sea \mathcal{M} una clase monótona sobre X . Sea $P \subseteq X$. Pongamos

$$\Omega(P) := \{Q \subseteq X: P \cup Q \in \mathcal{M}, P \setminus Q \in \mathcal{M}, Q \setminus P \in \mathcal{M}\}. \quad (1)$$

Entonces, $\Omega(P)$ es una clase monótona.

Demostración. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\Omega(P)$. Denotemos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ por V y usemos las siguientes identidades:

$$P \cup V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (P \cup A_n), \quad P \setminus V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (P \setminus A_n), \quad V \setminus P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus P).$$

Los conjuntos $P \cup A_n$, $P \setminus A_n$, $A_n \setminus P$ son elementos de \mathcal{M} . Además, las sucesiones $(P \cup A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(A_n \setminus P)_{n \in \mathbb{N}}$ son crecientes, y la sucesión $(P \setminus A_n)$ es decreciente. Como \mathcal{M} es una clase monótona, concluimos que $P \cup V, P \setminus V, V \setminus P \in \mathcal{M}$, lo cual significa que $V \in \Omega(P)$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $\Omega(P)$, entonces de manera similar se demuestra que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Omega(P)$. \square

8 Teorema (sobre la clase monótona generada por un álgebra). Sea X un conjunto, sea \mathcal{A} un álgebra sobre X y sea \mathcal{M} la clase monótona generada por \mathcal{A} . Entonces \mathcal{M} es una σ -álgebra. Más, aún, \mathcal{M} es la σ -álgebra generada por \mathcal{A} .

Razonamientos motivantes para la idea de demostración. Lo difícil será demostrar que \mathcal{M} es un anillo. Recordemos que la intersección se expresa a través de la diferencia: $P \cap Q = P \setminus (P \setminus Q)$. Además, $\emptyset \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Por lo tanto, nuestro objetivo principal es demostrar que la colección \mathcal{M} es cerrada bajo las operaciones binarias \cup y \setminus . En otras palabras, queremos demostrar que si $P, Q \in \mathcal{M}$, entonces

$$P \cup Q \in \mathcal{M}, \quad P \setminus Q \in \mathcal{M}, \quad Q \setminus P \in \mathcal{M}. \quad (2)$$

El problema es que la definición de \mathcal{M} no es constructiva. \mathcal{M} se define como la mínima entre todas las clases monótonas que contienen \mathcal{A} . En esta situación es natural definir cierta colección de “conjuntos buenos” y demostrar que esta colección coincide con \mathcal{M} . Tenemos una complicación técnica: las afirmaciones (2) dependen de dos conjuntos, P y Q . Trataremos P como un parámetro y consideraremos los conjuntos Q que son “amigos de P ” en el sentido que satisfacen (2). \square

Demostración. I. Vamos a demostrar que \mathcal{M} es un anillo. Esta parte de la demostración del Lema 7, con una secuencia de juegos lógicos simples. Para cada $P \subseteq X$, definimos $\Omega(P)$ mediante (1). Por el Lema 7, ya sabemos que $\Omega(P)$ es una clase monótona.

1. Si $P \in \mathcal{A}$ y $Q \in \mathcal{A}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. En efecto, como \mathcal{A} es un álgebra (en particular, \mathcal{A} es un anillo), tenemos que $P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.
2. Si $P \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$. Es otra forma del inciso anterior.

3. Si $P \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{M} \subseteq \Omega(P)$. En efecto, $\Omega(P)$ es una clase monótona que contiene \mathcal{A} , y \mathcal{M} es la clase monótona más pequeña con esta propiedad.
4. Si $P \in \mathcal{A}$ y $Q \in \mathcal{M}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Es otra forma del inciso anterior.
5. Si $P, Q \subseteq X$ y $Q \in \Omega(P)$, entonces $P \in \Omega(Q)$. En efecto, los conjuntos P y Q hacen papeles simétricos en la definición de $\Omega(P)$.
6. Si $P \in \mathcal{M}$ y $Q \in \mathcal{A}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Sale de los dos incisos anteriores.
7. Si $P \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$. Este inciso es equivalente al inciso anterior.
8. Si $P \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M} \subseteq \Omega(P)$. En efecto, $\Omega(P)$ es una clase monótona que contiene \mathcal{A} , y \mathcal{M} es la clase monótona más pequeña con esta propiedad.
9. Si $P, Q \in \mathcal{M}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Este inciso es equivalente al inciso anterior.

Hemos demostrado que si $P, Q \in \mathcal{M}$, entonces $P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \mathcal{M}$. Además, $\emptyset \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Por lo tanto, \mathcal{M} es un anillo de conjuntos.

II. Vamos a demostrar que \mathcal{M} es una σ -álgebra. Como \mathcal{M} es un anillo y $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, concluimos que \mathcal{M} es un álgebra. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{M} . Entonces, la sucesión de las uniones parciales $B_m := \bigcup_{n=1}^m A_n$ es creciente, y para cada m en \mathbb{N} tenemos que $B_m \in \mathcal{M}$ porque \mathcal{M} es un anillo. Luego

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \in \mathcal{M}.$$

III. Demostremos que \mathcal{M} es la más pequeña entre todas las σ -álgebras que contienen al álgebra \mathcal{A} . Sea \mathcal{H} una σ -álgebra sobre X tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$. Como \mathcal{H} es una σ -álgebra, \mathcal{H} es una clase monótona. Entonces, \mathcal{H} es una de las clases monótonas que contienen al álgebra \mathcal{A} . Por la definición de \mathcal{M} , concluimos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$. \square

9 Corolario (descripción de la σ -álgebra generada por una semiálgebra). *Sea X un conjunto, sea \mathcal{S} una semiálgebra sobre X , es decir, un semianillo sobre X tal que $X \in \mathcal{S}$. Denotemos por \mathcal{A} al álgebra generada por \mathcal{S} y por \mathcal{M} a la clase monótona mínima que contiene a \mathcal{A} . Entonces, \mathcal{M} es la σ -álgebra generada por \mathcal{S} .*

Demostración. El Teorema 8 garantiza que \mathcal{M} es una σ -álgebra. Además, \mathcal{M} contiene \mathcal{S} . En otras palabras, \mathcal{M} es una σ -álgebra que contiene \mathcal{S} .

Nos falta demostrar que \mathcal{M} es la más pequeña entre todas las σ -álgebras que contienen \mathcal{S} . Sea \mathcal{B} una σ -álgebra tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Queremos mostrar que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$.

Primero, recordemos que cada σ -álgebra es álgebra. Por eso \mathcal{B} es un álgebra que contiene \mathcal{S} . Pero \mathcal{A} es la mínima entre todas las álgebras que contienen \mathcal{S} . Luego $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Segundo, recordemos que cada σ -álgebra es una clase monótona. Por eso \mathcal{B} es una clase monótona que contiene \mathcal{A} . Pero \mathcal{M} es la más pequeña entre todas las clases monótonas que contienen \mathcal{A} . Luego $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$. \square