Espacios métricos: definición y ejemplos (un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de febrero de 2022

Objetivos.

- Estudiar la definición del espacio métrico.
- Conocer algunos ejemplos.

Prerrequisitos.

- Experiencia de trabajar con el valos absoluto.
- Experiencia de trabajar con la distancia usual (euclidiana) en el plano.
- Concepto de grafo.

Definición

Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función.

Se dice que d es una distancia en X, si se tienen las siguientes propiedades.

(D1) Desigualdad del triángulo:

$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(D2) Propiedad simétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x).$$

(D3) Para cada x en X, $\quad d(x, x) = 0$.

(D4) Separación de puntos:

$$\forall x, y \in X \qquad \Big(x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad d(x, y) > 0 \Big).$$

Espacio métrico

En vez de la palabra “distancia”, se usa también la palabra “métrica”.

Espacio métrico

En vez de la palabra "distancia", se usa también la palabra "métrica".

Definición

Sea X un conjunto y sea d una distancia en X.

Entonces se dice que (X, d) es un espacio métrico.

La desigualdad poligonal

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X.

Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

La desigualdad poligonal

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X. Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Idea de demostración. Inducción sobre m. $\square$

La desigualdad inversa del triángulo

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y, z \in X$. Entonces

$$\big| d(x,z) - d(y,z) \big| \leq d(x,y).$$

La desigualdad de cuadrilátero

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$. Entonces

$$\left| d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4) \right| \leq d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.
- La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.
- La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$.
- Para cada p en $[1, +\infty)$, la p-ésima distancia en $\mathbb{R}^n$:

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.
- La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$.
- Para cada p en $[1, +\infty)$, la p-ésima distancia en $\mathbb{R}^n$:

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

- La distancia de Hamming. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$.

$$d(a, b) = \#\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon a_k \neq b_k\} \qquad (a, b \in A^n).$$

- La distancia natural en un grafo.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{Z}$.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{Z}$.
- La distancia canónica en $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{Z}$.
- La distancia canónica en $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- La distancia canónica en $[a, b] \times [c, d]$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Ejemplos de distancias

- La distancia canónica en $\mathbb{Z}$.
- La distancia canónica en $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- La distancia canónica en $[a, b] \times [c, d]$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.
- La siguiente distancia en $\mathbb{Z}$:

$$d(x, y) := \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$