Medidas

Objetivos. Definir la noción de medidas y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Sigma-álgebras de conjuntos, series de números, conjuntos numerables y no numerables, sucesiones monótonas de conjuntos.

1. Definición (sucesión disjunta de conjuntos). Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Decimos que *los elementos de la sucesión son disjuntos por pares* o brevemente que la *sucesión es disjunta* si

$$\forall j,k\in\mathbb{N} \qquad (j\neq k) \quad \Longrightarrow \qquad A_j\cap A_k=\varnothing.$$

2. Definición (medida). Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X. Una función $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ se llama *medida* (o *medida positiva*) si $\mu(\varnothing)=0$ y μ es σ-aditiva. Lo último significa que para cualquier sucesión disjunta $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ se cumple la igualdad

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(A_j).$$

Notemos que el lado izquierdo de esta igualdad está bien definido pues $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\in\mathcal{F}$. Ambos lados de esta igualdad pueden ser iguales a $+\infty$.

3. Definición (medida compleja o carga). La definición es similar, pero $\mu\colon\mathcal{F}\to\mathbb{C}$.

4. Sea $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ una función σ-aditiva tal que $\mu(A)<+\infty$ para algún $A\in\mathcal{F}$. Entonces $\mu(\varnothing)=0$.

Ejemplos triviales de medidas

En cada uno de los siguientes ejemplos hay que demostrar que μ es una medida.

5. Medida de conteo. Sea X un conjunto. Pongamos $\mathcal{F}=2^X$ y definamos la función $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A)\coloneqq\begin{cases}+\infty, & \text{si } A \text{ es infinito;}\\ |A|, & \text{si } A \text{ es finito.}\end{cases}$$

Aquí $|A|$ es el número de elementos del conjunto A, esto es, la cardinalidad de A.

6. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} = 2^X$ y sea $x_0 \in X$. Definamos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in A; \\ 0, & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

7. Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos o numerables de X. Como ya hemos visto, la siguiente colección de conjuntos es una σ-álgebra sobre X:

$$\mathcal{F} \coloneqq \big\{ A \subset X\colon \quad A \in \mathcal{N} \quad \vee \quad A^c \in \mathcal{N} \big\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ mediante la regla

$$\mu(A) \coloneqq \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & A^c \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Propiedades elementales de las medidas

Suponemos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X y que $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ es una medida.

8. Propiedad aditiva. Sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ siempre que $i \neq j$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i).$$

9. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Entonces

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

10. Propiedad monótona. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

11. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$ y $\mu(A) < +\infty$. Entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

12. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Continuidad de medida por abajo y por arriba

13. Continuidad por abajo. Sea $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $\mathcal{F}$, esto es, $A_i \subset A_{i+1}$ para todo i. Denotemos por B a la unión de esta sucesión: $B \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Entonces

$$\mu(B) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Idea: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, donde $D_k = A_k \setminus A_{k-1}$ y $A_0 = \varnothing$.

14. Continuidad por arriba. Sea $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente en $\mathcal{F}$, esto es, $A_{i+1} \subset A_i$ para todo i. Sea $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Se supone que $\mu(A_1) < +\infty$. Demuestre que

$$\mu(B) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

15. Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la condición $\mu(A_1) < +\infty$ en la proposición anterior es esencial, es decir, sin esta condición la afirmación no es correcta.

Propiedad subaditiva de la medida

16. Propiedad subaditiva, el caso de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

17. Propiedad subaditiva, el caso finito. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre n y la proposición anterior. □

18. Proposición (propiedad subaditiva, el caso numerable). Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Idea de demostración. Definamos conjuntos U_k, $k \in \mathbb{N}$, como “uniones parciales” de la sucesión $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$U_k = \bigcup_{j\le k} A_j.$$

Es fácil ver que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Además $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos y $\mu(U_k) \le \sum_{j\le k} \mu(A_j)$. Por lo tanto,

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(U_k) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{j\le k} \mu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j). \qquad \square$$

19. Ejercicio. Haga la demostración con todos los detalles.

20. Corolario (unión de una sucesión de conjuntos de medida cero). Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(A_j) = 0$ para todo j en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = 0.$$

Medidas $\boldsymbol{\sigma}$-finitas

21. Criterio de que una medida es $\boldsymbol{\sigma}$-finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe una sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(A_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

(b) Existe una sucesión creciente $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(B_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

(c) Existe una sucesión $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos por pares, $\mathcal{F}$-medibles y tales que $\mu(C_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Si μ cumple con estas condiciones, entonces se llama σ-finita.