La medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos

Objetivos. Demostrar las siguientes propiedades de medidas: continuidad por abajo (la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos), continuidad por arriba (la medida de la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos).

Requisitos. Medidas, propiedades básicas de medidas, la estructura de una sucesión creciente de conjuntos, la estructura de una sucesión decreciente de conjuntos.

1 Teorema (la continuidad de la medida por abajo, o la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{F}$*, esto es,* $A_j \in \mathcal{F}$ *y* $A_j \subseteq A_{j+1}$ *para cada* j *en* $\mathbb{N}$*. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Demostración. Pongamos

$$A_0 \coloneqq \varnothing, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad B \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Sabemos que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta,

$$A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \quad (m \in \mathbb{N}), \qquad B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Luego

$$\mu(B) \overset{(1)}{=\!=} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k\right) \overset{(2)}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) \overset{(3)}{=\!=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k)$$
$$\overset{(4)}{=\!=} \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) \overset{(5)}{=\!=} \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

Justificación de los pasos:

(1): porque $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$;

(2): por la propiedad σ-aditiva de μ;

(3): por la definición de la suma de la serie;

(4): por la propiedad aditiva de μ;

(5): porque $A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$. $\square$

2 Teorema (la continuidad de la medida por arriba, o la medida de la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente en* $\mathcal{F}$*, esto es,* $A_j \in \mathcal{F}$ *y* $A_{j+1} \subseteq A_j$ *para cada* j *en* $\mathbb{N}$*. Se supone que* $\mu(A_1) < +\infty$*. Entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

3 Ejercicio. Demuestre el Teorema 2 usando los conjuntos

$$C \coloneqq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

y

$$D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

4 Ejercicio. Demuestre el Teorema 2 usando los conjuntos $B_j \coloneqq A_1 \setminus A_j$ y aplicando el Teorema 1.

5 Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la condición $\mu(A_1) < +\infty$ en el Teorema 2 es esencial, es decir, sin esta condición la afirmación no siempre es correcta.

Propiedad subaditiva de la medida

6 Proposición (propiedad subaditiva, el caso de dos conjuntos)**.** *Sean* $A, B \in \mathcal{F}$*. Entonces*

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

7 Proposición (propiedad subaditiva, el caso finito)**.** *Sean* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$*. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre n y la proposición anterior. □

8 Teorema (propiedad subaditiva)**.** *Sea* $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{F}$*. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Idea de demostración. Definamos conjuntos U_k, $k \in \mathbb{N}$, como "uniones parciales" de la sucesión $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$U_k = \bigcup_{j\le k} A_j.$$

Es fácil ver que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Además $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos y $\mu(U_k) \le \sum_{j\le k} \mu(A_j)$. Por lo tanto,

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(U_k) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{j\le k} \mu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j). \qquad \square$$

9 Ejercicio. Haga la demostración con todos los detalles.

10 Corolario (la unión de una sucesión de conjuntos de medida cero)**.** *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(A_j) = 0$ para todo j en $\mathbb{N}$. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = 0.$$

Medidas $\boldsymbol{\sigma}$-finitas

11 Proposición (criterio de que una medida es σ-finita)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existe una sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(A_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

(b) Existe una sucesión creciente $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tales que $\mu(B_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

(c) Existe una sucesión $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos por pares, $\mathcal{F}$-medibles y tales que $\mu(C_i) < +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Si μ cumple con estas condiciones, entonces se llama σ-finita.