Medida generada por la integral de Lebesgue de una función medible positiva

Objetivos. Dada una medida μ y una función medible positiva f consideramos la expresión $\int_A f\,d\mu$ como una función del conjunto A y demostramos que esta función es una medida.

Requisitos. Teorema de convergencia monótona, integral de una serie de funciones medibles positivas.

1. Teorema (sobre la medida asociada a una función positiva integrable). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Definimos la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mediante la regla:

$$\forall Y \in \mathcal{F} \qquad \varphi(Y) := \int\limits_X f\,d\mu.$$

Entonces:

1. φ es una medida.

2. Para cualquier función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ se cumple la fórmula

$$\int\limits_X g\,d\varphi = \int\limits_X gf\,d\mu. \tag{1}$$

2. Observación. Para la medida φ definida en este teorema a veces se usa la notación $f\,d\mu$ inspirada por la fórmula (1).

Demostración. 1. Demostremos que φ es una medida. Como ya habíamos visto, $\int_\varnothing f\,d\mu = 0$, esto es, $\varphi(\varnothing) = 0$. Hay que demostrar que φ es σ-aditiva. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos por pares, y sea $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Notemos que $f\chi_{A_n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$f\chi_B = \sum_{n\in\mathbb{N}} f\chi_{A_n}.$$

Por el teorema sobre la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int\limits_X f\chi_B\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X f\chi_{A_n}\,d\mu.$$

La última igualdad se puede escribir como

$$\int\limits_B f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{A_n} f\,d\mu,$$

o sea $\varphi(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

2. Primero demostremos la fórmula (1) para el caso particular cuando $g = s$, donde $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$. Supongamos que s tiene la siguiente representación canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{m} v_k \chi_{E_k}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int\limits_X s\, d\varphi &= \sum_{k=1}^{m} v_k \varphi(E_k) = \sum_{k=1}^{m} v_k \int\limits_{E_k} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} v_k \int\limits_X f \chi_k d\,\mu \\ &= \int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{m} v_k \chi_k \right) f\, d\mu = \int\limits_X sf\, d\mu.\end{aligned}$$

3. Ahora demostremos (1) para el caso general. Sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Elijamos una sucesión creciente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples $\mathcal{F}$-medibles positivas tal que $s_n(x) \to g(x)$ para todo $x \in X$. Por el inciso 2, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la fórmula

$$\int\limits_X s_n\, d\varphi = \int\limits_X s_n f\, d\mu.$$

En esta igualdad pasamos al límite cuando $n \to \infty$. Como $s_n \nearrow g$ y $fs_n \nearrow gf$, podemos aplicar el teorema de convergencia monótona:

$$\int\limits_X g\, d\varphi = \int\limits_X gf\, d\mu. \qquad \square$$