Completación de una medida

Objetivos. Definir el concepto de medida completa y demostrar que toda medida posee una completación.

Requisitos. σ-álgebra, medida.

1 Definición (medida completa)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es *completa* si para cada $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ y para cada $B \subseteq A$ se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

2 Definición (completación de una medida)**.** Sea X un conjunto y sean $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ y $\nu\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ medidas sobre X. Se dice que ν es una *completación* de μ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, ν es completa y $\nu(E) = \mu(E)$ para cada E en $\mathcal{F}$.

3 Lema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $E \subseteq X$ y $A, B \in \mathcal{F}$ conjuntos tales que*

$$A \subseteq E \subseteq B, \qquad \mu(B \setminus A) = 0.$$

Entonces,

$$\mu(A) = \mu(B) = \sup\big\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subseteq E\big\} = \inf\big\{\mu(G)\colon G \in \mathcal{F},\ G \supseteq E\big\}.$$

Demostración. Por la propiedad aditiva, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A)$.

Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq E$. Entonces, $F \subseteq B$ y por lo tanto $\mu(F) \leq \mu(B)$. Esto significa que $\mu(B)$ es el máximo del conjunto

$$\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subseteq E\}.$$

De manera similar, $\mu(A)$ es el mínimo del conjunto

$$\{\mu(F)\colon G \in \mathcal{F},\ G \supseteq E\}. \qquad \square$$

4 Teorema (sobre una completación de una medida)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces existe una σ-álgebra $\widetilde{\mathcal{F}}$ sobre X y una medida completa $\widetilde{\mu}\colon \widetilde{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$ tales que $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mu}$ es completa y $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ para cada E en $\mathcal{F}$.*

Demostración. I. Definamos $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}$. Pongamos

$$\widetilde{\mathcal{F}} \coloneqq \big\{E \subseteq X\colon \quad \exists A, B \in \mathcal{F} \quad A \subseteq E \subseteq B \quad \wedge \quad \mu(B \setminus A) = 0\big\}.$$

Para cada E en $\widetilde{\mathcal{F}}$, definamos $\widetilde{\mu}(E)$ mediante la fórmula:

$$\widetilde{\mu}(E) = \inf\big\{\mu(G)\colon G \in \mathcal{F},\ E \subseteq G\big\}.$$

Por el lema, el ínfimo se alcanza y es igual con el siguiente supremo que también se alcanza:

$$\widetilde{\mu}(E) = \sup\big\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subseteq E\big\}.$$

II. Si $E \in \mathcal{F}$, entonces poniendo $A = B = E$ tenemos que $A \subseteq E \subseteq B$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, así que $E \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$. Esto quiere decir que $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$ y la función $\widetilde{\mu}$ es una *extensión* de la función μ.

III. Demostremos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra.

$X \in \widetilde{\mathcal{F}}$ porque $X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$.

Sea $E \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Elijamos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq E \subseteq B$ y $\mu(B \setminus A) = 0$. Entonces, $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$,

$$A^c \setminus B^c = B \setminus A$$

y por lo tanto $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$, así que $E^c \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\widetilde{\mathcal{F}}$. Elijamos $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$A_n \subseteq E_n \subseteq B_n, \qquad \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Pongamos

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Entonces $C \subseteq F \subseteq D$ y

$$D \setminus C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap C^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap C^c) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n),$$

por lo tanto

$$\mu(D \setminus C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

y $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

IV. Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es una medida.

Como $\varnothing \in \mathcal{F}$, $\widetilde{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es σ-aditiva. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\widetilde{\mathcal{F}}$ de conjuntos disjuntos y sean A_n, B_n, C, D, F como antes. Si $j \neq k$, entonces

$$A_j \cap A_k \subseteq E_j \cap E_k = \varnothing,$$

así que los elementos de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos a pares. Por lo tanto,

$$\widetilde{\mu}(F) = \mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E_n).$$

V. Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es completa. Sean $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y $E \subseteq X$ tales que $\widetilde{\mu}(A) = 0$ y $E \subseteq A$. Entonces, por la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}$, existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq B$ y $\mu(B) = 0$. Como $\varnothing \subseteq E \subseteq B$ y $\mu(B \setminus \varnothing) = 0$, concluimos que $E \in \widetilde{F}$. □

En los siguientes dos ejercicios mostremos que el concepto de completación de medida se puede relacionar con el concepto de completación (o cerradura) para espacios métricos.

5 Ejercicio (la pseudodistancia entre conjuntos inducida por una medida exterior)**.** Sea $\varphi\colon 2^X \to [0,+\infty]$ una medida exterior. Definimos $d\colon 2^X \times 2^X \to [0,+\infty]$ mediante la regla

$$d(A,B) \coloneqq \varphi(A \triangle B).$$

Demuestre que d es una pseudodistancia en 2^X, esto es,

- $d(A,B) \geq 0$ para cualesquiera A, B en 2^X,
- $d(A,A) = 0$ para cualquier A en 2^X,
- $d(A,B) = d(B,A)$ para cualesquiera A, B en 2^X,
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ para cualesquiera A, B, C en 2^X.

6 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$ la medida exterior generada por μ. Definimos d como en el ejercicio anterior. Por otro lado, sea $\widetilde{\mathcal{F}}$ la σ-álgebra definida en el teorema sobre la completación de medida:

$$\widetilde{\mathcal{F}} \coloneqq \big\{E \subseteq X\colon \quad \exists A, B \in \mathcal{F} \quad A \subseteq E \subseteq B \quad \wedge \quad \mu(B \setminus A) = 0\big\}.$$

Demuestre que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es la cerradura de $\mathcal{F}$ respecto a la pseudodistancia d.