Funciones medibles

Objetivos. Definir la noción de funciones (aplicaciones) medibles, estudiar sus criterios y propiedades básicas.

Requisitos. σ-álgebras, preimagen de un conjunto bajo una función, propiedades de preimágenes.

1 Definición (función $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medible)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles. Una función $f\colon X \to Y$ se llama $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-*medible* si para todo $B \in \mathcal{H}$ se tiene que $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$ el conjunto de todas las funciones $X \to Y$ que son $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medibles:

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H}) := \Big\{ f \in Y^X : \quad \forall B \in \mathcal{H} \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \Big\}.$$

2 Lema (la imagen de una σ-álgebra; pushforward σ-algebra)**.** *Sean X, Y algunos conjuntos, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X y $f\colon X \to Y$. Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de los subconjuntos de Y cuyas preimágenes bajo f pertenecen a $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{C} = \big\{ B \subseteq Y : f^{-1}[B] \in \mathcal{A} \big\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra sobre Y.

Demostración. La demostración es directa; hay que aplicar la definición de σ-álgebra y propiedades de preimágenes. Por ejemplo, supongamos que $B \in \mathcal{C}$ y demostremos que $Y \setminus B \in \mathcal{C}$.

$$f^{-1}[Y \setminus B] = \{x \in X : \ f(x) \notin B\} = \{x \in X : \ x \notin f^{-1}[B]\} = X \setminus f^{-1}[B].$$

Por la definición de $\mathcal{C}$ tenemos que $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, concluimos que $f^{-1}[Y \setminus B] \in \mathcal{A}$. Ahora por la definición de $\mathcal{C}$ se obtiene que $Y \setminus B \in \mathcal{C}$. $\square$

3 Teorema (criterio de que una función es medible)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles y sea $f\colon X \to Y$. Supongamos que la σ-álgebra $\mathcal{H}$ está generada por una colección $\mathcal{G} \subset 2^Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{H}$;

(b) $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

Demostración. La implicación (a)$\Rightarrow$(b) es trivial pues $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Supongamos (b) y demostremos (a). Definamos $\mathcal{C}$ como en el lema anterior:

$$\mathcal{C} := \big\{ B \subseteq Y : \ f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \big\}.$$

Entonces la condición (b) implica que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$. Además por el Lema $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra. Como $\mathcal{H}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, obtenemos la contención $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$. Pero esto equivale a la condición (a). $\square$

Funciones medibles con valores en un espacio topológico

4 Definición (función $\mathcal{F}$-medible)**.** Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea Y un espacio topológico. Una función $f\colon X \to Y$ se llama $\mathcal{F}$-*medible* si para todo conjunto Borel-medible B del espacio Y su preimagen $f^{-1}[B]$ pertenece a $\mathcal{F}$. Notación: $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$.

5 Proposición. *Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, Y un espacio topológico, $f\colon X \to Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es medible, esto es, $f^{-1}[C] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto C Borel-medible en Y.

(b) $f^{-1}[C] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto C abierto en Y.

6 Proposición (relación entre funciones continuas y medibles)**.** *Sean X, Y espacios topológicos. Denotemos por τ_X y τ_Y las topologías correspondientes, y por $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ las σ-álgebras de Borel en estos espacios topológicos. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X tal que $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{F}$. Entonces cada función continua $X \to Y$ es $\mathcal{F}$–$\mathcal{B}_Y$-medible:*

$$C(X, Y) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{B}_Y).$$

Composiciones de funciones medibles

Recordemos que si $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $C \subseteq Z$, entonces

$$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]].$$

7 Proposición (composición de funciones medibles es medible)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$, $(Z, \mathcal{H})$ espacios medibles, y sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{G})$, $g \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, Z, \mathcal{H})$. Entonces $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z, \mathcal{H})$.*

8 Proposición (composición de una función medible con una función continua)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, Y, Z espacios topológicos, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ y $g \in C(Y, Z)$. Entonces $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z)$.*

Medibilidad de funciones características

9 Definición (función característica de un conjunto)**.** Sea X un conjunto y sea Y un subconjunto de X. Entonces la función $1_Y\colon X \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$1_Y(x) := \begin{cases} 1, & x \in Y, \\ 0, & x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

se llama la *función característica* (o la *función indicadora*) del conjunto Y.

Por supuesto, esta función depende también de X, y una notación más precisa sería $1_{X,Y}$, pero por lo común el conjunto X es fácil identificar por el contexto.

10 Proposición (criterio de medibilidad de la función indicadora)**.** *Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $A \subseteq X$. Entonces 1_A es $\mathcal{F}$-medibles si y sólo si $A \in \mathcal{F}$.*