Medibilidad sobre productos cartesianos

Objetivos. Estudiar el concepto de la medibilidad de funciones definidas en productos de espacios de medida.

Requisitos. σ-álgebras, funciones medibles, clases monótonas.

1 Definición ("rectángulos")**.** Sean X, Y conjuntos. Entonces cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se llama *rectángulo* en $X \times Y$.

2 Definición ("rectángulos medibles")**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, se llama *rectángulo medible* en $X \times Y$.

Previamente (en Análisis Matemático II) demostramos el siguiente resultado. No vamos a repasar su demostración.

3 Proposición (los rectángulos medibles forman un semianillo)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces la colección*

$$\mathcal{R} := \{A \times B \colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$$

es un semianillo.

4 Definición (producto de σ-álgebras)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con σ-álgebras. Se denota por $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$, es decir, por todos los rectángulos medibles.

5 Proposición (descripción del anillo generado por un semianillo, repaso)**.** *Dado un semianillo de conjuntos $\mathcal{S}$, el anillo generado por $\mathcal{S}$ consiste de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$.*

6 Definición (conjuntos elementales)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con σ-álgebras. Denotamos por $\mathcal{E}$ al anillo generado por la colección $\mathcal{R}$. Los elementos de $\mathcal{E}$ se llaman *conjuntos elementales*.

7 Proposición (descripción más contructiva de los conjuntos elementales)**.** *$\mathcal{E}$ es un álgebra de conjuntos sobre $X \times Y$. $\mathcal{E}$ consiste de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{R}$.*

Demostración. $X \times Y \in \mathbb{R}$, por eso $X \times Y \in \mathcal{E}$. La descripción de los elementos de $\mathcal{E}$ se sigue de la Proposición 5. □

8 Definición (clase monótona de conjuntos, repaso)**.** Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de conjuntos. Se dice que $\mathcal{F}$ es una *clase monótona* si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones de sucesiones crecientes de conjuntos y bajo intersecciones de sucesiones decrecientes de conjuntos.

9 Proposición (descripción de la σ-álgebra generada en términos de clases monótonas, repaso)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona más pequeña que contiene $\mathcal{A}$. Entonces $\mathfrak{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

10 Teorema. *$\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 9. □

Medibilidad de las secciones de conjuntos medibles

11 Definición (secciones de conjuntos)**.** Sea $E \subseteq X \times Y$. Entonces para todo a en X se pone

$$E_a \coloneqq \{y \in Y : \quad (a, y) \in E\},$$

y para todo $b \in Y$ se pone

$$E^b \coloneqq \{x \in X : \quad (x, b) \in E\}.$$

12 Ejercicio (las rectas verticales y horizontales en términos de las proyecciones)**.** Definimos $\pi_1 \colon X \times Y \to X$, $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ mediante las reglas

$$\pi_1(x, y) = x, \qquad \pi_2(x, y) = y.$$

Sea $a \in X$. Demostrar que

$$\{a\} \times Y = \pi_1^{-1}[\{a\}].$$

Sea $b \in Y$. Demostrar que

$$X \times \{b\} = \pi_2^{-1}[\{b\}].$$

13 Ejercicio (las secciones de conjuntos en términos de las proyecciones)**.** Sean $E \subseteq X \times Y$, $a \in X$, $b \in Y$. Expresar E_a y E^b en términos de E, a, b, π_1 y π_2.

14 Lema (sobre las secciones de un rectángulo)**.** *Sean $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $C = A \times B$. Entonces para cada x en X,*

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \varnothing, & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Demostración. 1. Consideremos el caso $x \in A$. Entonces para cada y en B tenemos $(x, y) \in C$, y para cada y en $Y \setminus B$ tenemos $(x, y) \notin C$. Luego

$$C_x = \{y \in Y : \ (x, y) \in C\} = B.$$

2. Consideremos el caso $x \in X \setminus A$. Para cada y en Y tenemos que $(x, y) \notin C$, luego

$$C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} = \varnothing. \qquad \square$$

15 Teorema (sobre la medibilidad de las secciones de un conjunto medible)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ conjuntos con σ-álgebras y sea $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces*

$$\forall x \in X \qquad E_x \in \mathcal{G}$$

y

$$\forall y \in Y \qquad E^y \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Demostremos solamente la afirmación sobre E_x. Sea

$$\Omega \coloneqq \{C \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \colon \quad \forall x \in X \quad C_x \in \mathcal{G}\}.$$

Del Lema 14 se sigue que $\mathcal{R} \subseteq \Omega$.

Probemos que Ω es una σ-álgebra.

- $X \times Y \in \Omega$, porque $\forall x \in X$ se tiene que $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{G}$.
- Si $C \in \Omega$, entonces para cada x en X tenemos que

  $$(C^c)_x = \{y \in Y \colon\ (x, y) \notin C\} = (C_x)^c \in \mathcal{G},$$

  así que $C^c \in \Omega$.
- Si $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ y $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$, entonces para cada x en X tenemos que

  $$\begin{aligned} D_x &= \left\{ y \in Y \colon\ (x, y) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \right\} \\ &= \{y \in Y \colon\ \exists k \in \mathbb{N} \quad (x, y) \in C_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (C_k)_x \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

  así que $D \in \Omega$.

Hemos mostrado que Ω es una σ-álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles. Por lo tanto, $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \Omega$, así que para cada E en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tenemos $E \in \Omega$, esto es, $E_x \in \mathcal{G}$ para cada x en X. □

16 Ejercicio. Demostrar el Teorema 15 usando el resultado del Ejercicio 13.

17 Ejercicio. Construir un ejemplo, cuando la medibilidad de las secciones E_x y E^y no implica la mediblidad del conjunto E. En otras palabras, encontrar espacios medibles $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ y un conjunto $E \subseteq X \times Y$ tales que

$$\Big(\forall x \in X \quad E_x \in \mathcal{G}\Big) \quad \wedge \quad \Big(\forall y \in Y \quad E^y \in \mathcal{F}\Big) \quad \wedge \quad \Big(E \notin \mathcal{F} \times \mathcal{G}\Big).$$

Medibilidad de secciones de funciones

18 Definición (secciones de funciones)**.** Sea $f \colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Para todo x en X definamos $f_x \colon Y \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall y \in Y \qquad f_x(y) = f(x, y).$$

Para todo $y \in Y$ definamos $f^y \colon X \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall x \in X \qquad f^y(x) = f(x, y).$$

19 Proposición. *Sea* $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$. *Entonces*

$$\forall x \in X \qquad f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, \mathbb{C})$$

y

$$\forall y \in Y \qquad f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}).$$

Demostración. Demostremos solamente la afirmación sobre f_x. Dado un conjunto abierto V en $\mathbb{C}$, pongamos

$$Q = f^{-1}[V] = \{(x, y) \in X \times Y : \; f(x, y) \in V\}.$$

Entonces $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Para cada x en X, $Q_x \in \mathcal{G}$. Por otro lado,

$$Q_x = \{y \in Y : \; f(x, y) \in V\} = \{y \in Y : \; f_x(y) \in V\} = f_x^{-1}[V].$$

Hemos mostrado que $f_x^{-1}[V] \in \mathcal{G}$ para cada x en X. □