Integrales de funciones monótonas y teoremas del valor medio

1. Lema (sobre preimágenes de intervalos respecto a funciones monótonas). Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente y B un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto $f^{-1}[B]$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Demostración. Es suficiente demostrar que si $\alpha, \beta \in f^{-1}[B]$, entonces $[\alpha, \beta] \subset f^{-1}[B]$. Sea $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Entonces $f(\alpha) \geq f(\gamma) \geq f(\beta)$, por lo cual $f(\gamma) \in [f(\beta), f(\alpha)] \subset B$ y $\gamma \in f^{-1}[B]$. □

2. Teorema (aproximación de funciones decrecientes por funciones numerablemente escalonadas). Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente (no necesariamente estrictamente decreciente) en A. Sea $\nu \in \mathbb{N}$ dado. Entonces existe una función "numerablemente escalonada"

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 1_{J_k},$$

donde $(J_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de intervalos disjuntos a pares cuya unión es A, tal que:

i) La restricción $\varphi|_A$ es una función decreciente en A.

ii) $\forall x \in A \qquad 0 \leq f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{\nu}$.

iii) $\varphi \geq 0$, si $f \geq 0$.

Idea de demostración. Pongamos

$$J_k := \left\{ x \in A\colon\ \frac{k}{\nu} \leq f(x) < \frac{k+1}{\nu} \right\}, \qquad c_k := \frac{k}{\nu}.$$

En otras palabras,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{\lfloor \nu f(x) \rfloor}{\nu}, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Por el Lema 1, para cada k en $\mathbb{Z}$ el conjunto J_k es un intervalo de $\mathbb{R}$. □

3. Corolario (aproximación de funciones decrecientes en un intervalo compacto por funciones escalonadas). Sean $A = [a, b]$ un invervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente en A. Entonces para todo ν en $\mathbb{N}$ existe una función escalonada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nula fuera de A y tal que:

i) La restricción $\varphi|_A$ es decreciente en A.

ii) $\forall x \in A \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{\nu}$.

iii) $\varphi \ge 0$, si $f \ge 0$.

4. Observación. Notemos que en la situación del corolario anterior existen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{R}$ tales que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$, $(a_{k-1}, a_k) \subset J_k \subset [a_{k-1}, a_k]$, y

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} v_k J_k.$$

5. Proposición (funciones monótonas son medibles y localmente integrables). Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función monótona en A. Entonces:

- f es medible;
- f es abotada y por lo tanto integrable en todo subintervalo compacto de A.

6. Teorema del valor medio para una función decreciente en un segmento y una función compleja. Sea $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ una función decreciente y sea $g \in L^1([a,b],\mathbb{C})$. Entonces $fg \in L^1([a,b],\mathbb{C})$ y

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \le f(a) \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x g \right|.$$

Idea de la demostración. Definimos $G\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$G(x) \coloneqq \int_a^x g.$$

Por la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración, la función G es continua. Pongamos

$$K \coloneqq \max_{a \le x \le b} |G(x)|.$$

Consideremos un caso particular cuando f es escalonada. Supongamos que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ y f tiene valor v_k en (a_{k-1}, a_k). Entonces

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^{m} v_k (G(a_k) - G(a_{k-1})).$$

Transformemos la suma obtenida de la siguiente manera (esta transformada a veces se llama *transformada de Abel* y es similar a la integración por partes):

$$\begin{aligned}\int_a^b fg &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} v_k G(a_k) - \sum_{k=2}^{m} v_k G(a_{k-1}) - v_1 G(a_0) \\ &= v_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) G(a_k).\end{aligned}$$

Luego

$$\left|\int_a^b fg\right| \le K\left(v_m + \sum_{k=1}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right) = K v_1 = K f(a).$$

Consideremos el caso general: f es decreciente, pero no necesariamente escalonada. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función φ escalonada y decreciente en $[a, b]$, tal que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Entonces

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left|\int_a^b (f-\varphi)g\right| + \left|\int_a^b \varphi g\right| \le \varepsilon K + \varphi(a)K \le (\varepsilon + f(a))K.$$

Como ε es arbitrario, obtenemos la estimación requerida. $\square$

7. Observación. Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema, y además g toma valores reales, esto es, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces existe ξ en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Teorema (segundo teorema del valor medio de Bonnet para una función monótona y una función compleja). Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a, b]$ y sea $g \in L^1([a, b], \mathbb{C})$. Entonces

$$\left|\int_a^b fg\right| \le (|f(a)| + 2|f(b)|) \max_{a\le x\le b}\left|\int_a^x g\right|. \tag{1}$$

Idea de la demostración. Si f es decreciente, aplicamos el teorema anterior a las funciones g y $f - f(b)$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b fg\right| &\le \left|\int_a^b (f - f(b))g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right| \\ &\le K(f(a) - f(b)) + K|f(b)| \le K(|f(a)| + 2|f(b)|).\end{aligned}$$

Si f es creciente, entonces aplicamos el teorema anterior a las funciones g y $f(b) - f$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b fg\right| &\le \left|\int_a^b (f(b)-f)g\right| + \left|\int_a^b f(b)g\right| \\ &\le K(f(b)-f(a)) + K|f(b)| \le K(|f(a)| + 2|f(b)|).\end{aligned}$$ □

9. Tarea. Demostrar que en el caso particular, cuando $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g.$$

10. Ejemplo. Ver cómo funciona el teorema anterior para las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. (Verificar la desigualdad y hallar ξ en la igualdad.)

11. Tarea. ¿Cuándo se alcanza la igualdad en la fórmula (1)?