La media y varianza de un vector en términos de la proyección ortogonal (un tema de álgebra lineal)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

31 de diciembre de 2025

Dado un vector x en $\mathbb{R}^n$, su media y su varianza se definen como

$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Dado un vector x en $\mathbb{R}^n$, su media y su varianza se definen como

$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Ejemplo ($n = 4$):

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Dado un vector x en $\mathbb{R}^n$, su media y su varianza se definen como

$$M(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(x))^2.$$

Ejemplo ($n = 4$):

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad M(x) = \frac{1 + 5 - 1 + 3}{4} = 2, \qquad V(x) = \frac{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2}{4} = 5.$$

Dado un vector x en $\mathbb{R}^n$, su media y su varianza se definen como

$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Ejemplo ($n = 4$):

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} M(x) &= \frac{1+5-1+3}{4} = 2, \\ V(x) &= \frac{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2}{4} = 5. \end{aligned}$$

En este tema **no** pensamos que x es un vector aleatorio; es solamente un vector numérico.

Se puede pensar que x es un muestreo; $M(x)$ y $V(x)$ son la media y varianza muestral.

Objetivo y prerrequisitos

$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Objetivo y prerrequisitos

$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Objetivo: explicar el sentido de $M(x)$ y $V(x)$ en términos de la proyección ortogonal.

Objetivo y prerrequisitos

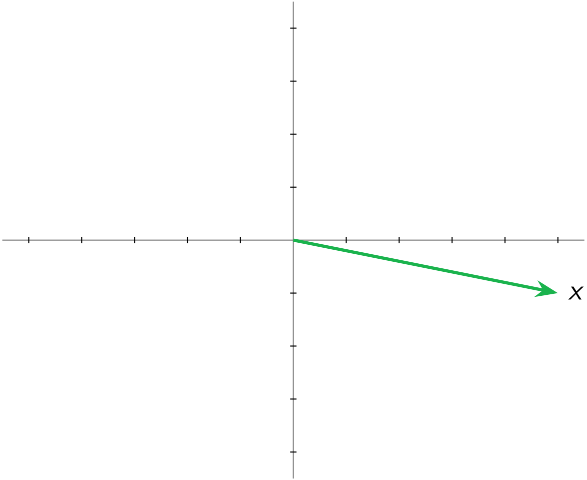
$$M(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad V(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - M(x))^2.$$

Objetivo: explicar el sentido de $M(x)$ y $V(x)$ en términos de la proyección ortogonal.

Prerrequisitos:

- conceptos básicos de álgebra lineal,
- espacios vectoriales con producto interno,
- proyección ortogonal sobre un espacio unidimensional.

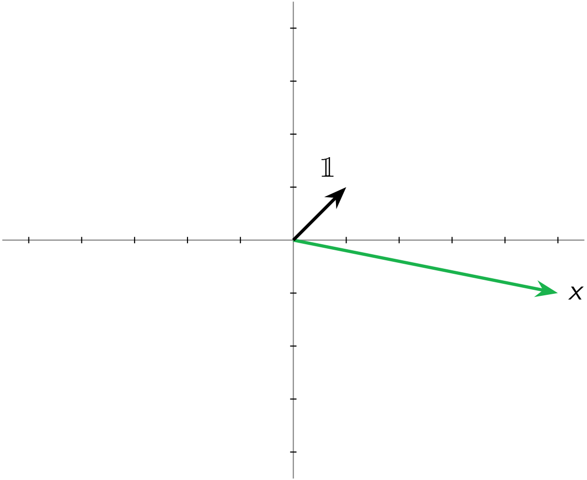
La idea principal en forma geométrica ($n = 2$)



$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = 2, \quad V(x) = 9.$$

La idea principal en forma geométrica ($n = 2$)

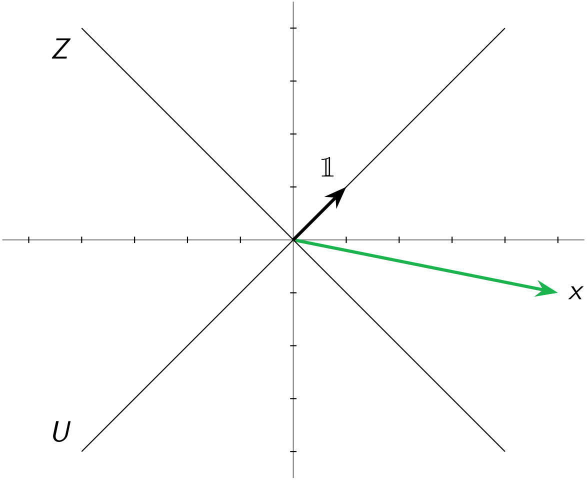


$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = 2, \quad V(x) = 9.$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La idea principal en forma geométrica ($n = 2$)

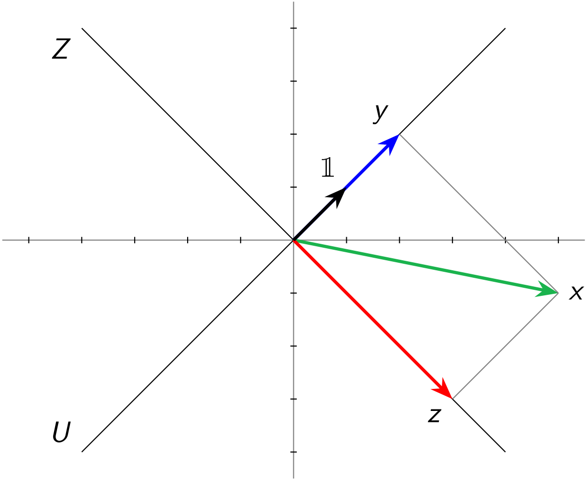


$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = 2, \quad V(x) = 9.$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La idea principal en forma geométrica ($n = 2$)

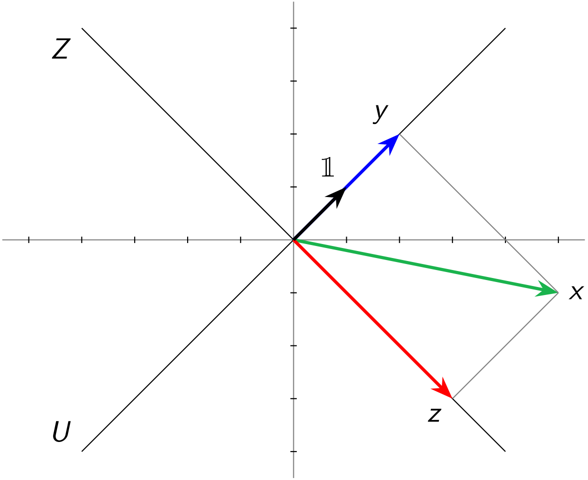


$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = 2, \quad V(x) = 9.$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La idea principal en forma geométrica ($n = 2$)



$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = 2, \quad V(x) = 9.$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$x = y + z$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad z = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El producto interno normalizado en $\mathbb{R}^n$

En este tema, definimos el producto interno en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Es casi el producto interno usual (euclidiano), pero con el coeficiente $\frac{1}{n}$.

La norma inducida por este producto interno es

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

El vector de unos

$$\mathbb{1} := [1]_{k=1}^{n} = [\underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n \text{ veces}}]^{\top}. \qquad \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n}.$$

El vector de unos

$$\mathbb{1} := [1]_{k=1}^{n} = [\underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n \text{ veces}}]^{\top}. \qquad \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n}.$$

Propiedades básicas del vector $\mathbb{1}$:

$$M(\mathbb{1}) = 1,$$

El vector de unos

$$\mathbb{1} := [1]_{k=1}^{n} = [\underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n\ \text{veces}}]^{\top}. \qquad \mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n}.$$

Propiedades básicas del vector $\mathbb{1}$:

$$M(\mathbb{1}) = 1, \qquad \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = 1,$$

El vector de unos

$$\mathbb{1} := [1]_{k=1}^{n} = [\underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{n \text{ veces}}]^\top. \qquad \mathbb{1} \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedades básicas del vector $\mathbb{1}$:

$$M(\mathbb{1}) = 1, \qquad \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = 1, \qquad \|\mathbb{1}\| = 1.$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

En efecto,

$$M(x)$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

En efecto,

$$M(x) =$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k =$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$\boxed{M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.}$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k \cdot 1$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$\boxed{M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.}$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k \cdot 1 =$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$\boxed{M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.}$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k \cdot 1 = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

La media de un vector en términos del producto interno

Dado x en $\mathbb{R}^n$,

$$M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

En efecto,

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1} x_k \cdot 1 = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

$M \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

El subespacio U: los múltiplos del vector de unos

$U :=$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathbb{1}$.

El subespacio U: los múltiplos del vector de unos

$U :=$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathbb{1}$.

En otras palabras, U es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbb{1}$:

$$U := \{c\mathbb{1} : \ c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,\mathbb{1}.$$

El subespacio U: los múltiplos del vector de unos

$U :=$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathbb{1}$.

En otras palabras, U es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbb{1}$:

$$U := \{c\mathbb{1}:\ c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,\mathbb{1}.$$

Los elementos de U son los vectores de la forma

$$[\underbrace{c,\ \ldots,\ c}_{n \text{ veces}}]^\top, \qquad \text{donde} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

El subespacio U: los múltiplos del vector de unos

$U :=$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathbb{1}$.

En otras palabras, U es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbb{1}$:

$$U := \{c\mathbb{1}:\ c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,\mathbb{1}.$$

Los elementos de U son los vectores de la forma

$$[\underbrace{c,\ \ldots,\ c}_{n \text{ veces}}]^\top, \qquad \text{donde} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Un vector pertenece a $U \iff$ todos sus componentes son iguales entre sí.

El subespacio Z: los vectores cuyo valor medio es 0

$$Z := \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \ M(z) = 0 \right\}, \qquad \text{esto es,} \qquad Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \ \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \right\}.$$

El subespacio Z: los vectores cuyo valor medio es 0

$$Z := \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \ M(z) = 0 \right\}, \qquad \text{esto es,} \qquad Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \ \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \right\}.$$

Es fácil ver que Z es el complemento ortogonal de U:

$$Z = U^{\perp}.$$

El subespacio Z: los vectores cuyo valor medio es 0

$$Z := \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \; M(z) = 0 \right\}, \qquad \text{esto es,} \qquad Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon \; \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \right\}.$$

Es fácil ver que Z es el complemento ortogonal de U:

$$Z = U^{\perp}.$$

En efecto,

$$z \in Z \quad \Longleftrightarrow \quad M(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle z, \mathbb{1} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \perp \mathbb{1} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in U^{\perp}.$$

La proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio U

Dado x en $\mathbb{R}^n$, definimos dos vectores y, z en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$y := \langle x, \mathbb{1} \rangle \, \mathbb{1}, \qquad z := x - y.$$

La proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio U

Dado x en $\mathbb{R}^n$, definimos dos vectores y, z en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$y \coloneqq \langle x, \mathbb{1} \rangle \, \mathbb{1}, \qquad z \coloneqq x - y.$$

En otra forma equivalente,

$$y = M(x)\mathbb{1}, \qquad z = x - M(x)\mathbb{1}.$$

La proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio U

Dado x en $\mathbb{R}^n$, definimos dos vectores y, z en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$y := \langle x, \mathbb{1} \rangle \, \mathbb{1}, \qquad z := x - y.$$

En otra forma equivalente,

$$y = M(x)\mathbb{1}, \qquad z = x - M(x)\mathbb{1}.$$

Es fácil ver que

$$x = y + z, \qquad y \in U, \qquad z \in Z.$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z)$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1})$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1})$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\, M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1}\rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1}\rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\, M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle x, \mathbb{1} \rangle - c\, \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle x, \mathbb{1} \rangle - c\,\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\, M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle x, \mathbb{1} \rangle - c\, \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = c - c$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\, M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle x, \mathbb{1} \rangle - c\, \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = c - c =$$

Mostremos que $z \in Z$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x) = \langle x, \mathbb{1} \rangle.$$

Primera demostración. Verifiquemos que $M(z) = 0$:

$$M(z) = M(x - c\mathbb{1}) = M(x) - c\,M(\mathbb{1}) = M(x) - M(x)1 = 0.$$

Segunda demostración. Usamos el producto interno:

$$\langle z, \mathbb{1} \rangle = \langle x - c\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle x, \mathbb{1} \rangle - c\,\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = c - c = 0.$$

$V(x) = \|z\|^2$

$$z = x - c\mathbb{1}, \qquad c = M(x).$$

El vector z en términos de sus componentes:

$$z = \left[x_k - c\right]_{k=1}^{n}.$$

$$\|z\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - c)^2 = V(x)^2.$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} =$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{z}.$$

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{z}.$$

$y \in U$: es un múltiplo del vector de unos (todas las componentes de y son iguales entre sí).

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{z}.$$

$y \in U$: es un múltiplo del vector de unos (todas las componentes de y son iguales entre sí).

$z \in Z$: la suma de las componentes de z es 0 (la media de z es 0).

Ejemplo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = M(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{z}.$$

$y \in U$: es un múltiplo del vector de unos (todas las componentes de y son iguales entre sí).

$z \in Z$: la suma de las componentes de z es 0 (la media de z es 0).

$$\|z\|^2 = \frac{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2}{4} = 5 = V(x).$$

Entre todos los elementos de U, y es el más cercano a x

Dado u en U, mostremos que

$$\|x - u\| \geq \|x - y\|.$$

Entre todos los elementos de U, y es el más cercano a x

Dado u en U, mostremos que

$$\|x-u\| \geq \|x-y\|.$$

Descomponemos x y usamos el téorema de Pitágoras:

$$\|x-u\|^2 = \|y+z-u\|^2 = \|\underbrace{y-u}_{\in U} + \underbrace{z}_{\in Z}\|^2$$

$$= \|y-u\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x-y\|^2.$$

Entre todos los elementos de U, $\quad y$ es el más cercano a x

Dado u en U, mostremos que

$$\|x-u\| \geq \|x-y\|.$$

Descomponemos x y usamos el téorema de Pitágoras:

$$\|x-u\|^2 = \|y+z-u\|^2 = \|\underbrace{y-u}_{\substack{\cap \\ U}} + \underbrace{z}_{\substack{\cap \\ Z}}\|^2$$

$$= \|y-u\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x-y\|^2.$$

Conclusión: $\|z\|$ es la distancia entre x y U.

Ejercicio.

Mostrar que entre todos los elementos de Z,

z es el elemento más cercano a x.

De manera más formal:

$$\forall w \in Z \qquad \|x - w\| \geq \|x - z\|.$$

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Conclusiones

$$\begin{tikzcd} & x \in \mathbb{R}^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y = M(x)\mathbb{1} & + & z = x - M(x)\mathbb{1} \end{tikzcd}$$

Conclusiones

$$\begin{tikzcd} & \boxed{x \in \mathbb{R}^n} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{y = M(x)\mathbb{1}} & + & \boxed{z = x - M(x)\mathbb{1}} \end{tikzcd}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

Conclusiones

$$\begin{tikzcd} & x \in \mathbb{R}^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y = M(x)\mathbb{1} & + & z = x - M(x)\mathbb{1} \end{tikzcd}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = M(x)\mathbb{1} \qquad + \qquad z = x - M(x)\mathbb{1}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,

y es el más cercano a x

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = M(x)\mathbb{1} \quad + \quad z = x - M(x)\mathbb{1}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,

y es el más cercano a x

$$\|x - y\| = \|z\| = \sqrt{V(x)}$$

es la distancia entre x a U

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = M(x)\mathbb{1} \quad + \quad z = x - M(x)\mathbb{1}$$

$y \in U$
las componentes son iguales entre si

$z \in Z$
la media es 0

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,
y es el más cercano a x

$$\|x - y\| = \|z\| = \sqrt{V(x)}$$

es la distancia entre x a U

Conclusiones

$$\begin{tikzcd} & x \in \mathbb{R}^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{y = M(x)\mathbb{1}} & + & \boxed{z = x - M(x)\mathbb{1}} \end{tikzcd}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,
y es el más cercano a x

$\|x - y\| = \|z\| = \sqrt{V(x)}$
es la distancia entre x a U

$z \in Z$

la media es 0

z es la proyección ortogonal de x sobre Z

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = M(x)\mathbb{1} \qquad + \qquad z = x - M(x)\mathbb{1}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,
y es el más cercano a x

$$\|x - y\| = \|z\| = \sqrt{V(x)}$$

es la distancia entre x a U

$z \in Z$

la media es 0

z es la proyección ortogonal de x sobre Z

entre todos los elementos de Z,
z es el más cercano a x

Conclusiones

$$x \in \mathbb{R}^n = \underbrace{y = M(x)\mathbb{1}}_{} + \underbrace{z = x - M(x)\mathbb{1}}_{}$$

$y \in U$

las componentes son iguales entre si

y es la proyección ortogonal de x sobre U

entre todos los elementos de U,
y es el más cercano a x

$$\|x - y\| = \|z\| = \sqrt{V(x)}$$

es la distancia entre x a U

$z \in Z$

la media es 0

z es la proyección ortogonal de x sobre Z

entre todos los elementos de Z,
z es el más cercano a x

$$\|x - z\| = \|y\| = |M(x)|$$

es la distancia entre x y Z