Espacios $\ell^p(\mathbb{N})$

Objetivos. Definir los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ con p en $[1, +\infty)$ y demostrar su completitud.

Prerrequisitos. Desigualdad de Minkowski, convergencia de series.

Recordemos que la suma de dos sucesiones y el producto de un escalar por una sucesión se definen por componentes: si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$a + b := (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda a := (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

1 Proposición. *El conjunto $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con las operaciones lineales definidas por coordenadas es un espacio vectorial complejo.*

Demostración. Todos axiomas del espacio vectorial son fáciles de verificar para este ejemplo. Mostremos solamente la propiedad distributiva respecto a la adición de vectores. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda(a + b) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$(\lambda(a + b))_k = \lambda(a + b)_k = \lambda(a_k + b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k = (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k,$$

así que $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$. Notemos que el vector cero del espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante nula $0_{\mathbb{N}}$. $\square$

Vamos a definir una familia de subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2 Definición. Sea $p \in [1, +\infty)$. Para cada $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pongamos

$$N_p(a) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Denotemos por $\ell^p(\mathbb{N})$ al conjunto de las sucesiones a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $N_p(a) < +\infty$. Denotemos por $\|\cdot\|_p$ a la función N_p restringida a $\ell^p(\mathbb{N})$.

3 Proposición. *El espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ con las operaciones por coordenadas y con la norma $\|\cdot\|_p$ es un espacio vectorial normado.*

Demostración. La desigualdad de Minkowski dice que si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, entonces

$$N_p(a + b) \le N_p(a) + N_p(b).$$

Esto implica que si $a, b \in \ell^p(\mathbb{N})$, entonces $a + b \in \ell^p(\mathbb{N})$ y

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$N_p(\lambda a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^p |a_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda|\, N_p(a).$$

En particular, si $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, entonces $\lambda a \in \ell^p(\mathbb{N})$ y

$$\|\lambda a\|_p = |\lambda|\, \|a\|_p.$$

Notamos que la sucesión nula $0_{\mathbb{N}}$ pertenece a $\ell^p(\mathbb{N})$.

Si $a \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|a\|_p = 0$, entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos $|a_k| \leq \|a\|_p = 0$, así que $a_k = 0$.

Hemos mostrado que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial complejo y que $\|\cdot\|_p$ es una norma en este espacio. $\square$

4 Proposición. *Sean $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y*

$$\|a\|_\infty \leq \|a\|_p,$$

esto es, para cada k en $\mathbb{N}$

$$|a_k| \leq \|a\|_p.$$

Demostración. En efecto, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|a\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \geq |a_k|^p.$$

Sacando la p-ésima raíz en ambos lados obtenemos $\|a_k| \leq \|a\|_p$. Como k es arbitrario,

$$\|a\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \leq \|a\|_p.$$ $\square$

5 Teorema (completitud de $\ell^p(\mathbb{N})$)**.** *Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $\ell^p(\mathbb{N})$ es completo.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\ell^p(\mathbb{N})$. Demostremos que esta sucesión converge. Notemos que para k en $\mathbb{N}$ y cada m, n en $\mathbb{N}$

$$|a_{m,k} - a_{n,k}| \le \|a_m - a_n\|_p \le 2^{-p-1}.$$

Luego la sucesión numérica $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy. Como el espacio $\mathbb{C}$ es completo, esta sucesión tiene un límite en $\mathbb{C}$. Lo denotemos por b_k. Pongamos $b \coloneqq (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, y $s \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{s} |a_{m,k} - a_{n,k}|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m,k} - a_{n,k}|^p = \|a_m - a_n\|_p^p \le \left(\frac{1}{2^m}\right)^p.$$

En esta desigualdad pasamos al límite cuando $n \to \infty$.

$$\sum_{k=1}^{s} |a_{m,k} - b_k|^p \le \left(\frac{1}{2^m}\right)^p.$$

Ahora pasamos al límite cuando s tiende a infinito:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m,k} - b_k|^p \le \left(\frac{1}{2^m}\right)^p.$$

De aquí se sigue que $a_m - b \in \ell^p(\mathbb{N})$ y

$$\|a_m - b\|_p \le \frac{1}{2^m}. \tag{1}$$

Como $\ell^p(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial, concluimos que $b = a_m - (a_m - b) \in \ell^p(\mathbb{N})$. Más aún, la desigualdad (1) implica que $\|a_m - b\|_p \to 0$, esto es, $a_m \to b$ en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ cuando m tiende a infinito. □

6 Ejercicio (sucesiones básicas)**.** Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos

$$e_m \coloneqq (\delta_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Por ejemplo,

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Demuestre que para cada p en $[1, +\infty)$ se tiene $e_m \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|e_m\|_p = 1$.

7 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^p(\mathbb{N})$. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos

$$b_m := \sum_{j=1}^{m} a_j e_j.$$

En otras palabras,

$$(b_m)_k := \begin{cases} a_k, & \text{si } k \leq m; \\ 0, & \text{si } k > m. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$b_3 = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots).$$

Demuestre que

$$\lim_{m \to \infty} \|b_m - a\|_p = 0.$$

8 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ de las sucesiones complejas de soporte finito es denso en $\ell^p(\mathbb{N})$.

9 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ de las sucesiones complejo-racionales de soporte finito es denso en $\ell^p(\mathbb{N})$. Demuestre que $\ell^p(\mathbb{N})$ es separable.