Algunos ejemplos importantes de espacios normados

Objetivos. Vamos a escribir una lista de ejemplos importantes de espacios normados. La mayoría de estos ejemplos serán espacios de Banach. En este texto no vamos a demostrar las propiedades de la norma ni la completez.

Prerrequisitos. Definición de la norma, el espacio vectorial de funciones complejas $\mathbb{C}^X$, el espacio vectorial de sucesiones $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p.

1 Proposición (repaso: el espacio de las funciones complejas definidas en un conjunto)**.** *Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathbb{C}^X$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$, con las operaciones lineales definidas punto a punto:*

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda\, f(x).$$

Entonces $\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial complejo.

En particular, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ denota el espacio de todas las sucesiones complejas.

A continuación del curso vamos a estudiar varios ejemplos importantes de espacios normados.

En este texto solamente mencionamos estos espacios, sin demostrar las propiedades de la norma. Todos los espacios que mencionamos a continuación son completos, excepto los espacios de la última subsección. En este tema no vamos a demostrar su completez.

Espacios de sucesiones

1. El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de sucesiones (complejas) acotadas. Se considera con la norma-supremo:
$$\|a\|_{\sup} = \|a\|_\infty \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

2. El espacio $c(\mathbb{N})$ de sucesiones convergentes. Es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y se considera con la norma $\|\cdot\|_\infty$ restringida a este subespacio.

3. El espacio $c_0(\mathbb{N})$ de sucesiones convergentes a cero. Es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ y se considera con la norma $\|\cdot\|_\infty$ restringida a este subespacio.

4. El espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ de sucesiones p-sumables, donde $1 \le p < +\infty$. Se considera con la norma
$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$
La propiedad subaditiva de esta norma se conoce como la desigualdad de Minkowski.

Algunos espacios de funciones

1. El espacio $B(X)$ de funciones acotadas (complejas) definidas en un conjunto X. Se considera con la norma-supremo:
$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

2. El espacio $C_b(X)$ de funciones acotadas continuas en un espacio métrico (o topológico) X. Es un subespacio cerrado de $B(X)$.

3. El espacio $C(K)$ de funciones continuas en un espacio métrico compacto K (o en espacio topológico compacto K). Como cada funciones continua definida en un compacto es acotada, este espacio coincide con $C_b(K)$.

4. El espacio $C_{b,u}(X)$ de funciones acotadas uniformemente continuas en un espacio métrico X. Notemos que si K es un espacio métrico compacto, entonces cualquier función continua $X \to \mathbb{C}$ es acotada y uniformemente continua, así que en este caso $C_{b,u}(K) = C_b(K) = C(K)$.

5. El espacio $C_0(\mathbb{R})$ de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que tienden a cero en el infinito. En vez del dominio $\mathbb{R}$ se podría tomar cualquier espacio de Hausdorff localmente compacto.

6. Espacios de Hölder y de Lipschitz.

7. Espacios $C^m([a, b])$.

8. Espacios de funciones de variación acotada.

9. Espacios de funciones absolutamente continuas.

10. Espacios de Bergman de funciones analíticas p-integrables.

Espacios de funciones medibles y de sus clases de equivalencia

Después de estudiar la teoría de la medida y la teoría de la integral de Lebesgue (en el curso Análisis Matemático II), podremos introducir los siguientes espacios de Banach muy importantes.

1. El espacio $L^\infty(X, \mu)$ de clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas, definidas en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

2. El espacio $L^p(X, \mu)$ de clases de equivalencia de funciones p-integrables, donde $1 \le p < +\infty$.

Algunos espacios normados no completos

También mencionemos algunos espacios normados que no son de Banach.

1. El espacio $c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) := \big\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \quad \{k \in \mathbb{N}:\ a_k \neq 0\} \text{ es finito}\big\}.$$

   Por lo común, se considera como un subespacio de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con la norma correspondiente. Es un subespacio no cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, por eso no es completo. Se puede demostrar que la cerradura de $c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es $c_0(\mathbb{N})$.

2. El espacio de polinomios considerados como funciones en un intervalo $[\alpha, \beta]$, con la norma-supremo. Este espacio es denso en $C([\alpha, \beta])$.

3. El espacio $C_c(\mathbb{R})$ de funciones continuas de soporte compacto, con la norma-supremo. Este espacio es denso en $C_0(\mathbb{R})$.