Continuidad de las transformaciones lineales cuyos dominios son de dimensión finita

Objetivos. Demostrar que si V, W son espacios normados complejos y V es de dimensión finita, entonces cada transformación lineal $T\colon V \to W$ es continua.

Prerrequisitos. El hecho que todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes entre si, el concepto de transformaciones lineales continuas.

En este tema, si no decimos otra cosa, consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma euclidiana:

$$\|a\|_2 \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1/2}.$$

1 Proposición. *Sea W un espacio normado complejo y sea $T\colon \mathbb{C}^n \to W$ una transformación lineal. Entonces T es continua.*

Demostración. Pongamos

$$M \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|Te_n\|_W^2\right)^{1/2}.$$

Notamos que $0 \le M < +\infty$. Para cada a en $\mathbb{C}^n$ tenemos que

$$Ta = \sum_{j=1}^{n} a_j Te_j.$$

Luego, por las propiedades de la norma en W,

$$\|Ta\|_W \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|\, \|Ta_j\|_W.$$

Por la desigualdad de Cauchy,

$$\|Ta\|_W \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|Ta_j\|_W\right)^{1/2} = M\|a\|_2.$$

Hemos mostrado que T es una transformación lineal acotada. $\square$

2 Proposición. *Sea W un espacio normado complejo y sea $T\colon \mathbb{C}^n \to W$ un isomorfismo lineal. Entonces T es un homeomorfismo.*

Demostración. Ya sabemos que T es una función continua. Demostremos que T^{-1} es continua.

Definimos $\nu\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla:

$$\nu(a) := \|Ta\|_W.$$

Es fácil ver que ν es una norma. Como todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes a la norma $\|\cdot\|_2$, existe $\gamma > 0$ tal que para cada a en $\mathbb{C}^n$

$$\|a\|_2 \le \gamma\nu(a). \tag{1}$$

Dado w en W, aplicamos la desigualdad (1) con $a = T^{-1}(w)$. Obtenemos que

$$\|T^{-1}w\|_2 \le \gamma\|w\|_W.$$

Hemos demostrado que la transformación lineal T^{-1} es acotada. □

3 Proposición. *Sean V, W espacios normados complejos. Supongamos que V es de dimensión finita. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$.*

Demostración. Sea $n = \dim(V)$. Usando una base del espacio vectorial V podemos construir un isomorfismo lineal $U\colon \mathbb{C}^n \to V$. Por la Proposición 2, tenemos que $U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$ y $U^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$. Además, como $TU\colon \mathbb{C}^n \to W$ es lineal, por la Proposición 1, $TU \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, W)$. Ahora de la igualdad $T = (TU)U^{-1}$ concluimos que $T \in \mathcal{B}(V, W)$. □

4 Corolario. *Sean V, W espacios normados complejos. Supongamos que V es de dimensión finita. Sea $T\colon V \to W$ un isomorfismo lineal. Entonces T es un homeomorfismo.*

5 Corolario. *Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.*

6 Corolario. *Sea V un espacio vectorial normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.*