Operaciones lineales con conjuntos totalmente acotados en espacios normados (un tema de análisis)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de agosto de 2024

Objetivo

Sea V un espacio vectorial complejo.

Mostremos que si P, Q son conjuntos totalmente acotados en V y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $P + Q$ y λP también son totalmente acotados.

Prerrequisitos

- Funciones Lipschitz continuas y conjuntos totalmente acotados.
- Productos directores de espacios métricos o normados.
- Continuidad de las operaciones lineales en espacios normados.

Repaso: la imagen de un conjunto totalmente acotado bajo una función Lipschitz continua

Proposición

Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos,

$f \in \mathrm{Lip}(X, Y)$,

$A \subseteq X$ tal que A es totalmente acotado.

Entonces, $f[A]$ es totalmente acotado.

La multiplicación por un escalar fijo es una función Lipschitz continua

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definimos $f\colon V \to V$,

$$f(x) := \lambda x.$$

Entonces, $f \in \mathcal{B}(V, V)$. En particular, f es Lipschitz continua.

Demostración

Las propiedades de operaciones lineales en V implican que f es lineal.

Demostración

Las propiedades de operaciones lineales en V implican que f es lineal.

Para cada x en V,

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|.$$

Demostración

Las propiedades de operaciones lineales en V implican que f es lineal.

Para cada x en V,

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|.$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{B}(V, V)$.

Demostración

Las propiedades de operaciones lineales en V implican que f es lineal.

Para cada x en V,

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{B}(V, V)$.

Sabemos que cada transformación lineal acotada es Lipschitz continua.

Demostración

Las propiedades de operaciones lineales en V implican que f es lineal.

Para cada x en V,

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{B}(V, V)$.

Sabemos que cada transformación lineal acotada es Lipschitz continua.

En nuestro caso,

$$\|f(a) - f(b)\| = \|\lambda a - \lambda b\| = |\lambda| \, \|a - b\|.$$

El producto de un conjunto totalmente acotado por un escalar

Proposición

Sean V un espacio vectorial complejo, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$A \subseteq V$ tal que A es totalmente acotado.

Entonces, λA es totalmente acotado.

El producto de un conjunto totalmente acotado por un escalar

Proposición

Sean V un espacio vectorial complejo, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$A \subseteq V$ tal que A es totalmente acotado.

Entonces, λA es totalmente acotado.

Demostración:

$$\lambda A = f[A],$$

donde $f(x) := \lambda x$.

El producto directo de espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

El producto directo de espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Definimos $\rho\colon (X \times Y)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho((x, y), (a, b)) \coloneqq \sqrt{d_X(x, a)^2 + d_Y(y, b)^2}.$$

El producto directo de espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Definimos $\rho\colon (X \times Y)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho((x, y), (a, b)) \coloneqq \sqrt{d_X(x, a)^2 + d_Y(y, b)^2}.$$

Usando la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}^2$,

es fácil demostrar que ρ es una distancia.

El producto directo de espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Definimos $\rho\colon (X \times Y)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho((x, y), (a, b)) := \sqrt{d_X(x, a)^2 + d_Y(y, b)^2}.$$

Usando la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}^2$,
es fácil demostrar que ρ es una distancia.

Otras distancias (Lipschitz equivalentes) en $X \times Y$:

$$d_X(x, a) + d_Y(y, b), \qquad \max\{d_X(x, a), d_Y(y, b)\}.$$

El producto directo de espacios normados

Sean V, W espacios normados complejos.

El producto directo de espacios normados

Sean V, W espacios normados complejos.

En el espacio vectorial $V \times W$ consideramos la función

$$\|(a,b)\|_{V\times W} := \sqrt{\|a\|_V^2 + \|b\|_W^2}.$$

Es fácil ver que esta función es una norma.

Otras normas equivalentes en $V \times W$:

$$\|a\|_V + \|b\|_W, \qquad \max\{\|a\|_V,\ \|b\|_W\}.$$

El producto directo de conjuntos totalmente acotados

Proposición

Sean X, Y espacios métricos y sean $P \subseteq X$, $Q \subseteq X$ conjuntos totalmente acotados.

Entonces, $P \times Q$ es totalmente acotado en $X \times Y$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Como P y Q son totalmente acotados, encontremos $R \subseteq P$ y $S \subseteq Q$ finitos tales que

$$P \subseteq V(R, \delta), \qquad Q \subseteq V(S, \delta).$$

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Como P y Q son totalmente acotados, encontremos $R \subseteq P$ y $S \subseteq Q$ finitos tales que

$$P \subseteq V(R, \delta), \qquad Q \subseteq V(S, \delta).$$

Entonces, $R \times S$ es un subconjunto finito de $P \times Q$.

Idea de demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Como P y Q son totalmente acotados, encontremos $R \subseteq P$ y $S \subseteq Q$ finitos tales que

$$P \subseteq V(R, \delta), \qquad Q \subseteq V(S, \delta).$$

Entonces, $R \times S$ es un subconjunto finito de $P \times Q$.

Ejercicio: muestre que

$$P \times Q \subseteq V(R \times S, \varepsilon).$$

La adición en un espacio normado es una función Lipschitz continua

Proposición

Sea V un espacio normado complejo.

Definimos $g\colon V^2 \to V$,

$$g(x, y) := x + y.$$

Entonces, $g \in \mathcal{B}(V^2, V)$. En particular, g es Lipschitz continua.

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x, y)\|_V$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x, y)\|_V =$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x, y)\|_V = \|x + y\|_V$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x, y)\|_V = \|x + y\|_V \leq$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x, y)\|_V = \|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x,y)\|_V = \|x+y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \leq$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x,y)\|_V = \|x+y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \leq \sqrt{2}\sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2}$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x,y)\|_V = \|x+y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \leq \sqrt{2}\sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2} =$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x,y)\|_V = \|x+y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \leq \sqrt{2}\,\sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2} = \sqrt{2}\,\|(x,y)\|_{V^2}.$$

Demostración

Es fácil ver que g es lineal.

Para cada (x, y) en V^2,

$$\|g(x,y)\|_V = \|x+y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V \leq \sqrt{2}\,\sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2} = \sqrt{2}\,\|(x,y)\|_{V^2}.$$

De manera similar,

$$\|g(x,y) - g(a,b)\|_V \leq \sqrt{2}\,\|(x,y) - (a,b)\|_{V^2}.$$

La suma de dos conjuntos totalmente acotados es un conjunto totalmente acotado

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ conjuntos totalmente acotados.

Entonces, $P + Q$ es totalmente acotado.

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) := x + y$.

.

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) \coloneqq x + y$.

$$P + Q$$

.

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) \coloneqq x + y$.

$$P + Q =$$

$$.$$

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) := x + y$.

$$P + Q = \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\}$$

.

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x,y) := x + y$.

$$P + Q = \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\}$$

$$=$$

$$.$$

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x,y) \coloneqq x + y$.

$$\begin{aligned} P + Q &= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\} \\ &= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists (p,q) \in P \times Q \quad v = g(p,q) \Big\} \end{aligned}$$

.

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x,y) \coloneqq x + y$.

$$\begin{aligned}
P + Q &= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\} \\
&= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists (p,q) \in P \times Q \quad v = g(p,q) \Big\} \\
&= \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) \coloneqq x + y$.

$$
\begin{aligned}
P + Q &= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\} \\
&= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists (p, q) \in P \times Q \quad v = g(p, q) \Big\} \\
&= g[P \times Q].
\end{aligned}
$$

Demostración

Usamos la función $g\colon V^2 \to V$, $g(x, y) \coloneqq x + y$.

$$
\begin{aligned}
P + Q &= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists p \in P \quad \exists q \in Q \quad v = p + q \Big\} \\
&= \Big\{ v \in V\colon \quad \exists (p, q) \in P \times Q \quad v = g(p, q) \Big\} \\
&= g[P \times Q].
\end{aligned}
$$

Como $g \in \operatorname{Lip}(V^2, V)$ y $P \times Q$ es totalmente acotado, obtenemos el resultado.